

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Bruno Pavani Bertolino

**MODELOS EFETIVOS SOB A AÇÃO DE CAMPOS
MAGNÉTICOS FORTES NO FORMALISMO DE VLASOV**

Florianópolis

2017

Bruno Pavani Bertolino

**MODELOS EFETIVOS SOB A AÇÃO DE CAMPOS
MAGNÉTICOS FORTES NO FORMALISMO DE VLASOV**

Tese submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física para a obtenção
do Grau de Doutor em Física.

Orientador

Universidade Federal de Santa Cata-
rina: Prof. Dr. Sidney dos Santos
Avancini

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bertolino, Bruno Pavani

Modelos efetivos sob a ação de campos magnéticos
fortes no formalismo de Vlasov / Bruno Pavani

Bertolino ; orientador, Sidney dos Santos Avancini
SC, 2017.

151 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Física, Florianópolis,
2017.

Inclui referências.

1. Física. 2. Equação de Vlasov. 3. Formalismo de
Wigner. 4. Magnetares. I. Avancini, Sidney dos
Santos. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

Bruno Pavani Bertolino

**MODELOS EFETIVOS SOB A AÇÃO DE CAMPOS
MAGNÉTICOS FORTES NO FORMALISMO DE VLASOV**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Física”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.

Florianópolis, 24 de março 2017.

Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Alexandre Magno Silva Santos
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Júnior
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Clebson Abati Graeff
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Dr. José Ricardo Marinelli
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Rafael Camargo Rodrigues de Lima
Universidade do Estado de Santa Catarina

Aos meus pais, José Roberto e Silvia.

AGRADECIMENTOS

Ao orientador, Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini, pela orientação, dedicação e compreensão.

À Universidade Federal de Santa Catarina, através do Departamento de Física, que me possibilitou a oportunidade de realizar este trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física e aos professores do Departamento de Física pela minha formação, tanto antes como durante o Doutorado.

À CAPES pela concessão da bolsa de Doutorado.

Aos meus pais, José Roberto Bertolino e Silvia Pavani, que sempre me apoiam.

Aos colegas de pesquisa e de curso.

A todos os que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, investigamos a possibilidade de obter uma equação de transporte quântica e relativística tipo Vlasov para a matéria nuclear característica da crosta interna dos magnetares, assim como relações de dispersão, através do uso do formalismo de Wigner. Demonstramos que o método é consistente com outras maneiras de obter equações desse tipo e aplicamos as equações obtidas para o cálculo de propriedades de transporte da matéria nuclear assimétrica infinita sob a ação de campos magnéticos fortes, determinando limites de instabilidade relacionados a transições de fase de primeira ordem.

Palavras-chave: Equação de Vlasov, Formalismo de Wigner, Magnetares.

ABSTRACT

In this work, we investigate the possibility of obtaining a Vlasov type quantum-relativistic transport equation for the kind of nuclear matter characteristic of the inner crust of magnetars, as well as dispersion relations, using the Wigner formulation of quantum mechanics. We show that the method is consistent with other approaches to the same problem and use the equations obtained here in order to calculate transport properties of infinite asymmetric nuclear matter under the influence of strong magnetic fields, determining instability limits related to first-order phase transitions.

Keywords: Vlasov equation, Wigner formalism, Magnetars.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELO DE WALECKA NÃO LINEAR	7
2.1	CÁLCULO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	10
2.2	APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO	15
3	OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE VLASOV PELA FUNÇÃO DE WIGNER	21
3.1	MATRIZ DE WIGNER	22
3.2	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO	25
3.3	APROXIMAÇÃO DE LIMITE CLÁSSICO	27
4	DINÂMICA NUCLEAR COM CAMPO MAGNÉTICO NULO	31
4.1	RELAÇÃO DE DISPERSÃO	31
4.2	ONDAS LONGITUDINAIS	41
5	DINÂMICA NUCLEAR COM CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE	51
5.1	OBTENÇÃO DE EQUAÇÕES TIPO VLASOV ATRAVÉS DA FUNÇÃO DE WIGNER	51
5.2	EQUAÇÕES CINÉTICAS PARA A FUNÇÃO DE WIGNER	57
5.3	MÉDIAS NA ENERGIA	69
5.4	EQUAÇÕES DE TRANSPORTE	80
5.5	CÁLCULO DA FUNÇÃO DE EQUILÍBRIO COM UM CAMPO MAGNÉTICO FORTE	86
5.6	PERTURBAÇÕES E RELAÇÃO DE DISPERSÃO	97
5.7	PERTURBAÇÕES LONGITUDINAIS	114
5.8	PERTURBAÇÕES TRANSVERSAIS	127
6	CÁLCULO COMPUTACIONAL E RESULTADOS	137
7	CONCLUSÃO	145
	REFERÊNCIAS	147

1 INTRODUÇÃO

O estudo das estrelas compactas, assim como o das colisões de íons pesados, representa uma boa oportunidade para os físicos nucleares e de partículas compreenderem a matéria em situações extremas (MARUYAMA et al., 2006; GLENDENNING, 2000; WEBER et al., 2007). Os detalhes envolvidos nas explosões de supernova e no comportamento e composição das estrelas de nêutrons têm sido objeto de estudo extensivo nas últimas décadas, e acredita-se que as estrelas de nêutrons sejam o resultado de explosões de supernova tipo II, Ib e Ic. Nestas explosões, o núcleo estelar é comprimido até uma densidade muitas vezes maior que a densidade nuclear de saturação, e assim se mantém estável devido à competição entre a interação nuclear forte e a gravidade, enquanto que o restante da estrela é expelido (AVANCINI et al., 2008).

Esta tese consiste prioritariamente de uma tentativa de aplicar a formulação de Wigner da mecânica quântica (WIGNER, 1932) para a obtenção de um análogo quântico e relativístico para as equações de transporte clássicas e a inserção de contribuições devidas a campos magnéticos fortes, de forma a calcular propriedades de transporte na matéria nuclear e os limites das regiões de instabilidade desta matéria. Temos interesse particular no estudo da estrutura das estrelas de nêutrons sujeitas a enormes campos magnéticos, os chamados magnetares (DUNCAN; THOMPSON, 1992). Por tratar-se de um estudo sobre volumes muito grandes de matéria nuclear homogênea, consideramos a matéria constituinte das estrelas de nêutrons como um caso da matéria nuclear assimétrica infinita.

Ao longo deste texto, aplicamos aproximações semiclássicas a um modelo de campo médio relativístico (SEROT; WALECKA, 1986) e obtemos para o caso de interesse uma equação tipo Vlasov (VLASOV, 1945; LANDAU, 1946) ou, na realidade, uma equação tipo Boltzmann sem termos de colisão. Demonstramos equivalências com outros métodos utilizados na literatura, e estabelecemos os meios de introduzir um campo magnético forte externo ao sistema para melhor reproduzir as condições encontradas nos magnetares. Para isso, nos baseamos em cálculos anteriores para um formalismo de equação de Vlasov sem campo magnético, que podem ser vistos em (AVANCINI et al., 2005). A intenção é utilizar o método das funções de Wigner (GROOT; SUTTORP, 2000; BRACK; BHADURI, 2003; MARCHIOLLI, 2002; RING; SCHUCK, 1980) para obter resultados comparáveis aos obtidos com aquele formalismo ou outros, tais como a teoria de Landau para o líquido de Fermi (LIFSHITZ;

PITAEVSKII, 1980).

Estamos interessados, a princípio, em parametrizações do modelo relativístico não-linear de Walecka (BOGUTA; BODMER, 1977). Modelos relativísticos, ao serem aplicados em altas densidades e assimetrias de isospin ou em altas temperaturas, providenciam informações adicionais àquelas obtidas com modelos não-relativísticos, como, por exemplo, uma explicação natural da força spin-órbita. Também pode-se esperar que seja possível estabelecer uma conexão entre esses modelos e descrições mais fundamentais das interações nucleares em teoria de campos, e que eles sirvam de base para uma descrição da matéria nuclear mais quente e densa, para a qual a relatividade torna-se mais importante (GREINER; MARUHN, 1996). A enorme dificuldade em aplicar diretamente as teorias mais fundamentais a sistemas de muitos corpos, no entanto, justifica o uso dos modelos efetivos tais como o modelo de Walecka e outros modelos com formalismo semelhante, como o de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961).

Em densidades de cerca de 0.01 a 0.1 fm^{-3} , a matéria restante das explosões de supernovas pode se organizar em fases exóticas chamadas de “pasta” nuclear, devido ao fato de que as escalas de comprimento das interações nuclear forte e eletromagnética estão mais próximas, e ocorre uma competição entre os dois tipos de interação (RAVENHALL; PETHICK; WILSON, 1983; HOROWITZ; PÉREZ-GARCIA; PIEKAREWICZ, 2004, 2005). Acredita-se que tais fases ocorram na crosta das estrelas de nêutrons, onde as densidades atingem os valores acima. Em densidades muito baixas, a matéria nuclear se arranja formando uma rede em um mar de elétrons, de modo a minimizar a energia coulombiana. Com o aumento da densidade, estruturas intermediárias começam a aparecer, como uma fase mista em uma transição de fase líquido-gás de primeira ordem. Essas configurações intermediárias enfim desaparecem em uma densidade abaixo da densidade de saturação, dando origem a uma fase homogênea. Identificando a equação de estado da matéria nuclear, pode-se determinar onde esta cruza as curvas espinodais (AVANCINI et al., 2008) características da transição de fase, e portanto em que temperaturas e densidades há o aparecimento da fase mista. Utilizando um formalismo de Vlasov, também podemos determinar em que situações a matéria nuclear homogênea torna-se instável, portanto estabelecendo limites para o aparecimento da fase “pasta”.

Como há partículas carregadas no sistema, ocorre um equilíbrio entre a tensão superficial e a interação coulombiana nas fases exóticas, e as estruturas que surgem nessa transição de fase têm tamanho e forma definidos, formando redes de “pedaços” de uma fase embutidas na outra

fase. Os pedaços das fases que aparecem na pasta podem ser modelados por estruturas com simetria esférica em três dimensões, em relação a rotações ao redor do eixo z em duas dimensões, ou em relação ao eixo perpendicular às camadas em uma dimensão. A essas estruturas são normalmente dados os nomes de *droplet* (gota) e *bubble* (bolha) em três dimensões, *rod* (bastão) e *tube* (tubo) em duas dimensões, e *slab* (placa) em uma dimensão, e todas são tipicamente definidas dentro de uma célula de Wigner-Seitz (MARUYAMA et al., 2006). As estruturas denominadas gota e bastão caracterizam-se por terem densidades maiores do que as das suas imediações na célula, assim como aquelas chamadas de bolha e tubo têm densidades menores. As estruturas que aparecem próximas ao limite de instabilidade da matéria nuclear são aquelas com simetria esférica, ou seja dos tipos gota e bolha (AVANCINI et al., 2008). Já realizamos estudos aprofundados sobre a matéria nestas regiões de instabilidade (AVANCINI; BERTOLINO, 2015), o que nos permitirá eventualmente comparar nossos resultados com aqueles que obtivemos anteriormente, assim como outros estudos sobre a região de instabilidade utilizando modelos de fases coexistentes (AVANCINI et al., 2009), modelo de Thomas-Fermi (AVANCINI et al., 2010), métodos de funcional da densidade (GÖGELEIN; MÜTHER, 2007) ou potenciais tipo Skyrme-Hartree-Fock (MARUYAMA et al., 2005), por exemplo.

Em densidades maiores, estuda-se a possibilidade de haver outras transições de fase. Em uma densidade várias vezes maior que a densidade de saturação, acredita-se que ocorra uma transição de fase de primeira ordem para um estado condensado de káons (KAPLAN; NELSON, 1986). Este condensado kaônico deve ocorrer em estrelas de nêutrons, em regiões onde a densidade é muito grande, com uma larga faixa de densidades em que aparece a fase mista, ocorrendo também estruturas com geometria definida chamadas de pasta kaônica. Com maior energia disponível, também tornam-se importantes as contribuições de bárions mais massivos. Além da transição de fase kaônica, em densidades ou temperaturas muito grandes, considera-se o desconfinamento dos quarks, que daria origem a uma fase mista de hádrons e quarks desconfinados (WITTEN, 1984). Entende-se esta última como um plasma de quarks e glúons, e procura-se compreender as propriedades da matéria quark utilizando-se métodos de primeiros princípios baseados na cromodinâmica quântica (QCD), tais como QCD na rede. Pouco se conhece sobre essa transição de fase, mas é sugerido que ela seja também uma transição de primeira ordem, com a possibilidade de surgimento de uma fase mista (ALAVERDYAN; HARUTYUNIAN; VARUTYUNIAN, 2004), como nos casos anteriores.

O estudo das propriedades de transporte da matéria nuclear em estrelas de nêutrons é de considerável interesse para prever certas características das regiões exteriores dessas estrelas, tais como a condutividade térmica e a emissividade de neutrinos, que são importantes para determinar a rapidez com que a estrela se resfria (YAKOVLEV; PETHICK, 2004), e também a viscosidade, momento de inércia e outras propriedades mecânicas, importantes na previsão dos *glitches* observados em pulsares. (LINK; EPSTEIN; LATTIMER, 1999) Como essas propriedades têm relação com observáveis, permitem que os resultados da teoria sejam comparados com dados astronômicos, que servem como um laboratório astrofísico para as teorias e modelos. No nosso caso, para chegar a resultados mais adequados, no entanto, será necessário modelar também as colisões na matéria nuclear, indo, portanto, além da equação de Vlasov. Este é um dos objetivos que procuramos alcançar futuramente.

O presente texto se dedica quase inteiramente a desenvolver, justificar e demonstrar a aplicabilidade do método da função de Wigner para a futura obtenção das propriedades de transporte da matéria nuclear sob a influência de campos magnéticos fortes, detalhando as bases teóricas para este fim. Os cálculos já realizados na área encontram-se, de certa forma, dispersos. (VASAK et al., 1987; TENREIRO; HAKIM, 1977; KELLY, 1964) Aqui reunimos os resultados de vários trabalhos e construímos sobre eles, de maneira a estabelecer um formalismo *ab initio* para a resolução dos problemas que queremos investigar. Em paralelo a este desenvolvimento analítico, dispomos de algoritmos capazes de calcular as soluções das equações de dispersão que obtemos aqui, dependendo de pequenos ajustes para atingir objetivos específicos. A intenção, portanto, é utilizar estes algoritmos para obter informações sobre modos coletivos na matéria nuclear e realizar comparações com outros resultados obtidos por nós e aqueles encontrados na literatura.

No segundo capítulo do trabalho - imediatamente após esta introdução - descrevemos, de maneira breve mas suficiente para os nossos propósitos, o modelo efetivo de Walecka (SEROT; WALECKA, 1986) para a interação nuclear mediada por mésons, que utilizamos ao longo de todo o estudo. O terceiro capítulo está dedicado ao formalismo de Wigner da mecânica quântica (WIGNER, 1932), nos seus fundamentos e algumas particularidades que necessitamos aqui. No quarto capítulo, realizamos uma revisão dos resultados já obtidos por outro método para as equações de transporte e de dispersão para o caso com campo magnético nulo, que pode ser encontrado em uma formulação original em (BRITO et al., 2006), desta vez utilizando a formulação de Wigner. O

corpo do trabalho em si é desenvolvido ao longo do quinto capítulo, onde realizamos a extensão dos procedimentos do quarto capítulo para o caso da matéria nuclear sujeita a um campo magnético externo constante, analisando detalhadamente a evolução de perturbações longitudinais e transversais à direção do campo, obtendo as relações de dispersão para cada caso, propondo e aplicando um método numérico para resolver as equações e obter informações sobre as regiões de instabilidade características da transição de fase. No sexto capítulo, descrevemos sucintamente o método numérico empregado e expomos os resultados obtidos para alguns casos escolhidos. Finalmente, no sétimo capítulo, encerramos com a conclusão.

2 MODELO DE WALECKA NÃO LINEAR

O problema de descrever a matéria nuclear infinita para aplicações como o cálculo da equação de estado e propriedades das estrelas de nêutrons é extremamente complicado de ser resolvido em nível fundamental. Uma maneira de obter resultados adequados é a utilização de modelos efetivos parametrizados com o auxílio de constantes conhecidas. Há vários destes modelos que são muito conhecidos e vêm sendo utilizados há bastante tempo e diferem entre si principalmente na maneira como se considera as interações. Exemplos são o modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961), que modela interações entre quarks, e a hadrodinâmica quântica (HDQ), proposta por Walecka e colaboradores (SEROT; WALECKA, 1986), que modela interações entre mésons. A princípio, escolhemos parametrizações do modelo de Walecka para realizar nossos cálculos no decorrer deste trabalho.

Sabe-se hoje que a interação nuclear que gera os potenciais nucleon-nucleon advém da dinâmica subjacente de quarks e glúons, mas esta também pode ser descrita, no regime de energias mais baixas, de maneira efetiva por uma teoria de mésons, fornecendo uma descrição da matéria hadrônica. O formalismo da HDQ trata da interação nuclear como sendo originada da troca de mésons virtuais, e os efeitos relativísticos são incorporados naturalmente à teoria, que é portanto uma teoria de campo quântico relativística.

Na forma mais simples da HDQ, consideram-se dois campos mesônicos: um campo isoescalar-escalar atrativo associado ao méson σ e um campo isoescalar-vetorial repulsivo associado ao méson ω , que origina o comportamento da interação em curtas distâncias. Desta maneira, ficamos com o chamado modelo σ - ω de Walecka. A introdução desses dois mésons é motivada pela observação de componentes escalares e quadrivetoriais na interação nuclear. Os efeitos das trocas de mésons π são nulos em média ao descrevermos as propriedades da matéria nuclear na aproximação de Hartree, devido à dependência da interação com o spin (SEROT; WALECKA, 1986), e por isso a colaboração do méson π é desprezada nesta descrição mais simples.

A densidade Lagrangeana para este modelo σ - ω é a seguinte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v V^\mu) - M^*]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m_s^2) \\ & - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_v^2 V_\mu V^\mu + \delta\mathcal{L},\end{aligned}\quad (2.1)$$

onde:

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \quad (2.2)$$

$$M^* = M - g_s\phi. \quad (2.3)$$

Aqui, os campos ϕ e V^μ são os campos escalar e vetorial, respectivamente. As constantes de acoplamento entre os campos mesônicos e bariônicos são, para cada um deles, g_s e g_v . M é a massa do nucleon, considerada igual para prótons e nêutrons, e M^* definida acima é chamada massa efetiva. As massas m_s e m_v são propriedades dos mésons σ e ω . Todas as massas e constantes de acoplamento constituem parâmetros da teoria.

É importante perceber, entretanto, que no modelo σ - ω de Walecka linear, o valor da incompressibilidade da matéria nuclear é consideravelmente superestimado. O valor obtido com esta teoria mais simples é de $\kappa = 545$ MeV, muito acima dos valores obtidos empiricamente, o que nos mostra a necessidade de correções à teoria. A ideia de Boguta e Bodmer (BOGUTA; BODMER, 1977) de acrescentar termos proporcionais ao campo escalar ao cubo e à quarta potência à densidade Lagrangiana é o método mais utilizado para deslocar o valor da incompressibilidade para regiões aceitáveis. Uma parametrização comum desse modelo é a parametrização NL3. A densidade Lagrangeana proposta para esta finalidade tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{NL3} = \mathcal{L}_1 - \frac{1}{6}\kappa(g_s\phi)^3 - \frac{1}{24}\lambda(g_s\phi)^4. \quad (2.4)$$

Mais recentemente, Tood-Rutel e Piekarewicz propuseram um modelo com outros termos não-lineares, além dos termos acima. Para este caso, temos a densidade Lagrangeana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{FSU} = & \mathcal{L}_1 - \frac{1}{6}\kappa(g_s\phi)^3 - \frac{1}{24}\lambda(g_s\phi)^4 + \frac{\xi}{24}(g_v^2 V_\mu V^\mu)^2 \\ & + g_{wr}\left(g_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu\right)(g_v^2 V_\mu V^\mu).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Além dessas correções, para darmos uma boa descrição da matéria nuclear, é essencial que levemos em conta a assimetria entre prótons e nêutrons. A contribuição dessa assimetria à densidade Lagrangiana se dá na forma da adição de um campo isovetorial-vetorial correspondente ao méson ρ . Também devem ser adicionados para nossa descrição da matéria em estrelas de nêutrons os termos referentes à interação eletromagnética, de maneira a levar em conta a repulsão entre os prótons e a atração entre os prótons e os elétrons, que são necessários para satisfazer as condições de neutralidade de carga e o equilíbrio β .

Dessa maneira, consideraremos para nossos propósitos uma extensão ao modelo de Walecka original chamado modelo σ - ω não-linear, que reproduz de maneira bastante mais satisfatória as propriedades da matéria nuclear. A densidade Lagrangeana completa é a seguinte:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=p,n} \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_\omega + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_{\omega\rho} + \mathcal{L}_\gamma. \quad (2.6)$$

Explicitando os termos:

$$\mathcal{L}_i = \bar{\psi}_i [\gamma_\mu i D^\mu - M^*] \psi_i, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e [\gamma_\mu (i \partial^\mu + e A^\mu) - m_e] \psi_e, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2 - \frac{1}{3} \kappa (g_s \phi)^3 - \frac{1}{12} \lambda (g_s \phi)^4 \right), \quad (2.9)$$

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} + m_v^2 V_\mu V^\mu + \frac{\xi}{12} (g_v^2 V_\mu V^\mu)^2 \right), \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu \right), \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_{\omega\rho} = g_{\omega\rho} (g_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu) (g_v^2 V_\mu V^\mu) \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde

$$iD^\mu = i\partial^\mu - g_v V^\mu - \frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{b}^\mu - e \frac{1 + \tau_3}{2} A^\mu, \quad (2.14)$$

$$\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{b}_\nu - \partial_\nu \vec{b}_\mu - g_\rho (\vec{b}_\mu \times \vec{b}_\nu), \quad (2.15)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.16)$$

Os operadores ψ_i e os seus adjuntos $\bar{\psi}_i$ representam os campos dos nucleons. Aqui, \vec{b}^μ é um campo isovetorial-vetorial com massa m_ρ e constante de acoplamento g_ρ , associado ao méson ρ , de onde se origina a contribuição do isospin (AVANCINI et al., 2008). A^μ é o campo eletromagnético, cujo bóson de calibre, o fóton, possui massa nula. A constante de acoplamento do campo eletromagnético é igual à carga elementar $e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}$. Por fim, m_e corresponde à massa dos elétrons, o vetor $\vec{\tau}$ é o operador de isospin, e τ_3 é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tau_3(p) &= 1 \\ \tau_3(n) &= -1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.1 CÁLCULO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A partir da densidade Lagrangeana, podemos calcular as equações de movimento para os campos ξ do modelo, através das equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \xi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0. \quad (2.18)$$

Para $\xi = \bar{\psi}_i$, temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_i)} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_i} = [\gamma_\mu iD^\mu - M^*] \psi_i, \quad (2.20)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_i} = [\gamma_\mu iD^\mu - M^*] \psi_i = 0. \quad (2.21)$$

Para $\xi = \bar{\psi}_e$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_e)} = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_e} = [\gamma_\mu (i\partial^\mu + eA^\mu) - m_e] \psi_e, \quad (2.23)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_e)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_e} = [\gamma_\mu (i\partial^\mu + eA^\mu) - m_e] \psi_e = 0, \quad (2.24)$$

que é a equação de Dirac. Para $\xi = \phi$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) = \partial^\mu \phi, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m_s^2 \phi - \frac{\kappa}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{6} \phi^3 + g_s \bar{\psi}_i \psi_i, \quad (2.26)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \phi + m_s^2 \phi + \frac{\kappa}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^3 - g_s \bar{\psi}_i \psi_i = 0. \quad (2.27)$$

Para $\xi = V_\mu$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu V_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu V_\mu)} \left(-\frac{1}{4} \Omega_{\mu'\nu'} \Omega^{\mu'\nu'} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu V_\mu)} [(\partial_{\mu'} V_{\nu'} - \partial_{\nu'} V_{\mu'}) \\ &\quad \times (\partial^{\mu'} V^{\nu'} - \partial^{\nu'} V^{\mu'})] \\ &= -\frac{1}{4} [(\delta_{\bar{\mu}\mu'} \delta_{\mu\nu'} - \delta_{\bar{\mu}\nu'} \delta_{\mu\mu'}) \Omega^{\mu'\nu'} \\ &\quad + \Omega_{\mu'\nu'} (\delta_{\bar{\mu}}^{\mu'} \delta_{\mu}^{\nu'} - \delta_{\bar{\mu}}^{\nu'} \delta_{\mu}^{\mu'})] \\ &= -\Omega^{\bar{\mu}\mu}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu} = m_v^2 V^\mu + \frac{1}{6} \xi g_v^4 V^\mu V^\mu V_\mu + 2g_{wr} g_\rho^2 g_v^2 \vec{b}^\mu V^\mu - g_v \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\bar{\mu}} V_{\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_{\mu}} = & -\partial_{\bar{\mu}} \Omega^{\bar{\mu}\mu} - m_v^2 V^{\mu} + \frac{1}{6} \xi g_v^4 V^{\mu} V_{\mu} V^{\mu} \\ & + 2g_{wr} g_{\rho}^2 g_v^2 \vec{b}_{\mu} \cdot \vec{b}^{\mu} V^{\mu} + g_v \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_i = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde

$$\partial_{\bar{\mu}} \Omega^{\bar{\mu}\mu} = \partial_{\bar{\mu}} \partial^{\bar{\mu}} V^{\mu} - \partial^{\mu} \partial_{\bar{\mu}} V^{\bar{\mu}} = \partial_{\bar{\mu}} \partial^{\bar{\mu}} V^{\mu}. \quad (2.31)$$

Podemos ver que o segundo termo na expressão acima se anula tomando ∂_{μ} da equação (2.30):

$$-\partial_{\mu} \partial_{\bar{\mu}} \Omega^{\bar{\mu}\mu} - m_v^2 \partial_{\mu} V^{\mu} + g_v \partial_{\mu} (\bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_i) = -m_v^2 \partial_{\mu} V^{\mu} = 0, \quad (2.32)$$

onde o primeiro termo se anula por se tratar de um tensor simétrico operando em um tensor anti-simétrico, e o terceiro termo se anula devido à equação da continuidade para a corrente $j^{\mu} = \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_i$, que deve ser conservada. Finalmente, obtemos:

$$\partial_{\bar{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\bar{\mu}} V_{\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_{\mu}} = -\partial_{\bar{\mu}} \partial^{\bar{\mu}} V^{\mu} - m_v^2 V^{\mu} + g_v \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_i = 0. \quad (2.33)$$

Para $\xi = \vec{b}_{\mu}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\bar{\mu}} \vec{b}_{\mu})} = \frac{\partial}{\partial (\partial_{\bar{\mu}} \vec{b}_{\mu})} \left(-\frac{1}{4} \vec{B}_{\mu'\nu'} \vec{B}^{\mu'\nu'} \right) = -\vec{B}^{\bar{\mu}\mu}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{b}_{\mu}} = m_{\rho}^2 \vec{b}^{\mu} + 2g_{wr} (g_{\rho}^2 \vec{b}^{\mu}) (g_v^2 V_{\mu} V^{\mu}) - \frac{g_{\rho}}{2} \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \vec{\tau} \psi_i, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\vec{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\vec{\mu}} \vec{b}_{\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{b}_{\mu}} &= -\partial_{\vec{\mu}} \vec{B}^{\vec{\mu}\mu} - m_{\rho}^2 \vec{b}^{\mu} \\
&+ 2g_{wr}(g_{\rho}^2 \vec{b}^{\mu})(g_v^2 V_{\mu} V^{\mu}) + g_{\rho} \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_i \\
&= -\partial_{\vec{\mu}} \partial^{\vec{\mu}} \vec{b}^{\mu} - m_{\rho}^2 \vec{b}^{\mu} \\
&+ 2g_{wr}(g_{\rho}^2 \vec{b}^{\mu})(g_v^2 V_{\mu} V^{\mu}) + g_{\rho} \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \psi_i \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Para $\xi = A_{\mu}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\vec{\mu}} A_{\mu})} = \frac{\partial}{\partial (\partial_{\vec{\mu}} A_{\mu})} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu'\nu'} F^{\mu'\nu'} \right) = -F^{\vec{\mu}\mu}, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} = -e \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \frac{(1 - \tau_3)}{2} \psi_i + e \bar{\psi}_e \gamma^{\mu} \psi_e, \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\vec{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\vec{\mu}} A_{\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu}} &= -\partial_{\vec{\mu}} F^{\vec{\mu}\mu} + e \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \frac{(1 - \tau_3)}{2} \psi_i \\
&- e \bar{\psi}_e \gamma^{\mu} \psi_e \\
&= -\partial_{\vec{\mu}} \partial^{\vec{\mu}} A^{\mu} + e \bar{\psi}_i \gamma^{\mu} \frac{(1 - \tau_3)}{2} \psi_i \\
&- e \bar{\psi}_e \gamma^{\mu} \psi_e = 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

A partir da densidade Lagrangeana, podemos obter também o tensor densidade de energia-momento, de acordo com a equação:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_{\xi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \xi} \partial^{\nu} \xi. \tag{2.40}$$

Já calculamos os termos do somatório, de maneira que o tensor tem a forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\mu\nu} = & -g^{\mu\nu} \left\{ \bar{\psi}_i \left[\gamma_{\mu'} i D^{\mu'} - M^* \right] \psi_i \right. \\
& + \bar{\psi}_e \left[\gamma_{\mu'} \left(i \partial^{\mu'} + e A^{\mu'} \right) - m_e \right] \psi_e + \\
& + \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu'} \phi \partial^{\mu'} \phi - m_s^2 \phi^2 \right) - \frac{1}{3!} k (g_s \phi)^3 - \frac{1}{4!} \lambda (g_s \phi)^4 \\
& - \frac{1}{4} \Omega_{\mu' \nu'} \Omega^{\mu' \nu'} + \frac{1}{2} m_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} - \frac{1}{4} \vec{B}_{\mu' \nu'} \cdot \vec{B}^{\mu' \nu'} \\
& + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{b}_{\mu'} \cdot \vec{b}^{\mu'} + \frac{\xi}{4!} \left(g_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} \right)^2 + g_{wr} \left(g_\rho^2 \vec{b}_{\mu'} \cdot \vec{b}^{\mu'} \right) \left(g_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} \right) \\
& \left. - \frac{1}{4} F_{\mu' \nu'} F^{\mu' \nu'} \right\} \\
& + \bar{\psi}_i i \gamma^\mu \partial^\nu \psi_i + \bar{\psi}_e i \gamma^\mu \partial^\nu \psi_e \\
& + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \Omega^{\mu\nu'} \partial^\nu V_{\nu'} \\
& - \vec{B}^{\mu\nu'} \cdot \partial^\nu \vec{b}_{\nu'} - F^{\mu\nu'} \partial^\nu A_{\nu'}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Usando as equações de movimento para os campos dos nucleons e dos elétrons, temos que os primeiros termos da equação são nulos, e desta forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{\mu\nu} = & -g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \left(\partial_{\mu'} \phi \partial^{\mu'} \phi - m_s^2 \phi^2 \right) - \frac{1}{3!} k (g_s \phi)^3 - \frac{1}{4!} \lambda (g_s \phi)^4 \right. \\
& - \frac{1}{4} \Omega_{\mu' \nu'} \Omega^{\mu' \nu'} + \frac{1}{2} m_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} - \frac{1}{4} \vec{B}_{\mu' \nu'} \cdot \vec{B}^{\mu' \nu'} \\
& + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{b}_{\mu'} \cdot \vec{b}^{\mu'} + \frac{\xi}{4!} \left(g_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} \right)^2 + g_{wr} \left(g_\rho^2 \vec{b}_{\mu'} \cdot \vec{b}^{\mu'} \right) \left(g_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} \right) \\
& \left. - \frac{1}{4} F_{\mu' \nu'} F^{\mu' \nu'} \right] \\
& + \bar{\psi}_i i \gamma^\mu \partial^\nu \psi_i + \bar{\psi}_e i \gamma^\mu \partial^\nu \psi_e \\
& + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \Omega^{\mu\nu'} \partial^\nu V_{\nu'} \\
& - \vec{B}^{\mu\nu'} \cdot \partial^\nu \vec{b}_{\nu'} - F^{\mu\nu'} \partial^\nu A_{\nu'}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Do tensor densidade de energia-momento, tomando a compo-

nente \mathcal{T}^{00} , obtemos a densidade de Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & - \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) - \frac{1}{3!} k (g_s \phi)^3 - \frac{1}{4!} \lambda (g_s \phi)^4 - \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \right. \\
& + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu - \frac{1}{4} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{b}_\mu \cdot \vec{b}^\mu \\
& + \frac{\xi}{4!} \left(g_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} \right)^2 + g_{wr} \left(g_\rho^2 \vec{b}_{\mu'} \cdot \vec{b}^{\mu'} \right) \left(g_v^2 V_{\mu'} V^{\mu'} \right) \\
& \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \\
& + \bar{\psi}_i i \gamma^0 \partial^0 \psi_i + \bar{\psi}_e i \gamma^0 \partial^0 \psi_e \\
& + \partial^0 \phi \partial^0 \phi - \Omega^{0\nu} \partial^0 V_\nu - \vec{B}^{0\nu} \cdot \partial^0 \vec{b}_\nu - F^{0\nu} \partial^0 A_\nu.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.2 APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO

As equações de movimento para os campos mesônicos que obtivemos na última seção são equações de campo não lineares, com soluções muito complicadas. Como esperamos que as constantes de acoplamento g_s , g_v e g_ρ sejam grandes, também não podemos esperar utilizar métodos perturbativos para solucionar as equações. No entanto, existe uma aproximação que se torna cada vez mais válida conforme a densidade nuclear aumenta, a chamada aproximação de campo médio. Os termos de fonte no lado direito das equações de movimento aumentam com a densidade bariônica, e quando esses termos são grandes, os operadores de campo mesônicos e do campo eletromagnético podem ser substituídos pelos seus valores esperados. Para um sistema estático e uniforme, a invariância rotacional implica que os valores esperados das componentes espaciais dos campos quadridimensionais se anulam, restando somente as componentes tipo tempo (SEROT; WALECKA, 1986). Considerando também a invariância em relação a rotações em torno do terceiro eixo do espaço de isospin, somente a terceira componente isovetorial do campo do méson ρ permanece (BUNTA; GМУCA, 2003). Isto pode ser escrito formalmente como:

$$\langle \hat{\phi} \rangle = \phi_0(x), \tag{2.44}$$

$$\langle \hat{V}^\mu \rangle = V_0(x) \delta^{\mu 0}, \tag{2.45}$$

$$\langle \hat{b}_i^\mu \rangle = b_0(x) \delta^{\mu 0} \delta_{i3}, \quad (2.46)$$

$$\langle \hat{A}^\mu \rangle = A_0(x) \delta^{\mu 0}, \quad (2.47)$$

com

$$\partial^0 \phi_0 = \partial^0 V_0 = \partial^0 b_0 = \partial^0 A_0 = 0. \quad (2.48)$$

Dessa forma, na aproximação de campo médio:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_0 + \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{3!} \kappa (g_s \phi)^3 + \frac{1}{4!} \lambda (g_s \phi)^4 \\ & + \frac{\xi}{4!} (g_v^2 V_0^2)^2 + g_{wr} (g_\rho^2 g_v^2 b_0^2 V_0^2) \\ & - \frac{1}{2} \vec{\nabla} V_0 \cdot \vec{\nabla} V_0 - \frac{1}{2} m_v^2 V_0^2 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} b_0 \cdot \vec{\nabla} b_0 - \frac{1}{2} m_\rho^2 b_0^2 \\ & - \frac{1}{2} \vec{\nabla} A_0 \cdot \vec{\nabla} A_0 + \bar{\psi}_i i \gamma^0 \partial^0 \psi_i + \bar{\psi}_e i \gamma^0 \partial^0 \psi_e, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde utilizamos a relação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) (\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu - \partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu V_0 \partial^\mu V_0 - \partial_\mu V_0 \partial^0 V_0) \\ &= -\frac{1}{2} (\vec{\nabla} V_0 \cdot \vec{\nabla} V_0), \end{aligned} \quad (2.50)$$

e relações similares para os demais tensores. Então, a partir das equações de movimento para o campo do núcleon e do elétron (2.21) e (2.24), calculadas na aproximação de campo médio, podemos escrever:

$$\begin{aligned} i \gamma^0 \partial^0 \psi_i &= \{-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 [g_v V_0 + \frac{g_\rho}{2} b_0 \tau_3 \\ &\quad + \frac{e}{2} (1 + \tau_3) A_0] + M^*\} \psi_i \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$i \gamma^0 \partial^0 \psi_e = \left[-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - \gamma^0 [e A_0 + m_e] \right] \psi_e, \quad (2.52)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_i i \gamma^0 \partial^0 \psi_i &= \psi_i^\dagger \gamma^0 \{ -i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 [g_v V_0 + \frac{g_\rho}{2} b_0 \tau_3 \\ &\quad + \frac{e}{2} (1 + \tau_3) A_0] + M^* \} \psi_i \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\bar{\psi}_e i \gamma^0 \partial^0 \psi_e = \psi_e^\dagger \gamma^0 \left[-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - \gamma^0 e A_0 + m_e \right] \psi_e. \quad (2.54)$$

Portanto, como $\gamma^0 \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$ e $\gamma^0 = \beta$, podemos escrever a hamiltoniana como:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3 r \, \hat{\psi}_i^\dagger [-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta (M - g_s \phi(\vec{r})) + g_v V_0(\vec{r}) + \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 b_0(\vec{r}) \\ &\quad + e \frac{1 + \tau_3}{2} A_0(\vec{r})] \hat{\psi}_i + \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \phi(\vec{r}))^2 + m_s^2 \phi^2(\vec{r}) \right] + \frac{\kappa}{6} (g_s \phi)^3(\vec{r}) \\ &\quad + \frac{\lambda}{24} (g_s \phi)^4(\vec{r}) - \frac{\xi}{24} (g_v^2 V_0^2(\vec{r}))^2 - g_{wr} (g_\rho^2 g_v^2 b_0^2(\vec{r}) V_0^2(\vec{r})) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} V_0(\vec{r}))^2 + m_v^2 V_0^2(\vec{r}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} b_0(\vec{r}))^2 + m_\rho^2 b_0^2(\vec{r}) \right] - \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} A_0(\vec{r}) \right]^2 \\ &\quad + \hat{\psi}_e^\dagger \left[-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_e - e A_0(\vec{r}) \right] \hat{\psi}_e. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Podemos também escrever as equações de movimento para os campos mesônicos e o campo eletromagnético na aproximação de campo médio, a partir das que tínhamos obtido anteriormente, usando $\bar{\psi}_i = \gamma^0 \psi_i^\dagger$:

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + m_s^2 \right) \phi = g_s \left\langle \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \right\rangle - \frac{1}{2} \kappa g_s^3 \phi^2 - \frac{1}{6} \lambda g_s^4 \phi^3, \quad (2.56)$$

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + m_v^2 \right) V_0 = g_v \left\langle \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \right\rangle + \frac{1}{12} g_v^2 V_0 + 2 g_{wr} g_\rho^2 g_v^2 b_0^2 V_0, \quad (2.57)$$

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + m_\rho^2 \right) b_0 = \frac{g_\rho}{2} \left\langle \hat{\psi}_i^\dagger \tau_3 \hat{\psi}_i \right\rangle + 2 g_{wr} g_\rho^2 g_v^2 b_0 V_0^2, \quad (2.58)$$

$$-\vec{\nabla}^2 A_0 = e \left\langle \hat{\psi}_i^\dagger \frac{1 + \tau_3}{2} \hat{\psi}_i \right\rangle - e \left\langle \hat{\psi}_e^\dagger \hat{\psi}_e \right\rangle, \quad (2.59)$$

onde os valores esperados acima, que correspondem a densidades, dependem da posição espacial. Finalmente, identificamos os operadores de campo da seguinte maneira:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) + \rho_n(\vec{r}) = \left\langle \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \right\rangle, \quad (2.60)$$

$$\rho_3(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) - \rho_n(\vec{r}) = \left\langle \hat{\psi}_i^\dagger \tau_3 \hat{\psi}_i \right\rangle, \quad (2.61)$$

$$\rho_s(\vec{r}) = \rho_{s_p}(\vec{r}) + \rho_{s_n}(\vec{r}) = \left\langle \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i \right\rangle, \quad (2.62)$$

$$\rho_e(\vec{r}) = \left\langle \hat{\psi}_e^\dagger \hat{\psi}_e \right\rangle. \quad (2.63)$$

Escrevemos as equações de movimento em função das densidades:

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + m_s^2 \right) \phi = g_s \rho_s(\vec{r}) - \frac{1}{2} \kappa g_s^3 \phi^2 - \frac{1}{6} \lambda g_s^4 \phi^3, \quad (2.64)$$

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + m_v^2 \right) V_0 = g_v \rho(\vec{r}) + \frac{1}{12} g_v^2 V_0 + 2g_{wr} g_\rho^2 g_v^2 b_0^2 V_0, \quad (2.65)$$

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + m_\rho^2 \right) b_0 = \frac{g_\rho}{2} \rho_3(\vec{r}) + 2g_{wr} g_\rho^2 g_v^2 b_0 V_0^2, \quad (2.66)$$

$$-\vec{\nabla}^2 A_0 = e (\rho_p(\vec{r}) - \rho_e(\vec{r})). \quad (2.67)$$

Neste trabalho, iremos nos concentrar nestas equações como o ponto de partida para o cálculo de propriedades de transporte, especialmente sob um campo magnético externo muito forte, condição que ocorre nos magnetares. Visando este objetivo, iremos investigar um método de obter um análogo quântico à equação de Vlasov, a equação de transporte clássica na ausência de colisões.

De posse destas equações, a princípio, já podemos calcular diversas propriedades da matéria nuclear. Por serem mais simples, elas são de relativamente fácil implementação numérica. A partir desta base, refinamentos podem ser feitos tanto ao modelo em si como às aproximações utilizadas. Dependendo da faixa de densidade em que se trabalha, pode ser necessária a inclusão da contribuição de outros

hádrons, por exemplo. No caso de termos matéria homogênea, iremos obter funções de distribuição de equilíbrio independentes da posição. No entanto, para a matéria não-homogênea, como no caso das fases exóticas, torna-se necessário considerar a dependência espacial, e é comum a utilização da aproximação de Thomas-Fermi. Visto que esta é uma aproximação de ordem zero, é interessante utilizar um método para melhorar sua precisão de maneira progressiva e consistente com princípios fundamentais, denominada aproximação de Thomas-Fermi estendida (TFE) (CENTELLES, 1992). Tal método foi estudado por nós como parte de um curso de mestrado, com a intenção de calcular densidades de energia e limites de existências das geometrias bolha e gota na fase “pasta” em estrelas de nêutrons. (BERTOLINO, 2012).

3 OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE VLASOV PELA FUNÇÃO DE WIGNER

No seu trabalho pioneiro (WIGNER, 1932), Wigner desenvolveu uma formulação da mecânica quântica na qual as suas propriedades estatísticas se mostram evidentes. Desta forma, a formulação de Wigner (também conhecida como Weyl-Wigner ou Weyl-Wigner-Moyal) é bastante adequada para a obtenção de análogos quânticos às equações de transporte clássicas. No presente momento, estamos interessados na equação de transporte na ausência de colisões, isto é, em uma equação de Vlasov quântica e relativística. Detalharemos aqui o método de obtenção desta equação de Vlasov de maneira a acomodar nossas necessidades, isto é, prover as ferramentas para calcular os limites de instabilidade e propriedades de transporte na matéria nuclear infinita. A princípio buscamos utilizar um modelo σ - ω similar ao originalmente proposto por Walecka (SEROT; WALECKA, 1986), mas as equações obtidas são gerais, portanto devem ser apropriadas para o cálculo de propriedades com outros modelos efetivos.

Na mecânica estatística, podemos definir uma função $P(q^n, p^n, t)$ que determina a probabilidade de encontrar o sistema em um dado microestado no espaço de configurações em um instante t . O sistema quântico caracterizado por matéria nuclear infinita ($N \rightarrow \infty$) é descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$, portanto buscamos encontrar uma representação do operador densidade na base das coordenadas e dos momentos. Mostraremos que essa representação, chamada função de Wigner e geralmente representada por $F(r, \Pi)$ faz o papel da função de distribuição clássica, e de fato se reduz a esta quando desprezamos fatores de ordem quadrática ou maior em \hbar . Wigner definiu em seu trabalho a seguinte função para esse propósito:

$$F(r, \Pi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{-\frac{i}{\hbar}\Pi\zeta} \left\langle r + \frac{\zeta}{2} \left| \hat{\rho} \right| r - \frac{\zeta}{2} \right\rangle. \quad (3.1)$$

Em seu trabalho, Wigner demonstra que esta função é a única escolha possível para atender às necessidades de um análogo quântico à função de distribuição clássica, isto é: deve existir um operador hermitiano tal que, calculado entre estados de um corpo, resulta na função definida; a função deve ser normalizada, transformar-se da mesma maneira que o estado quântico $\phi(x)$ sob transformações de translação, reflexão e inversão temporal; e, finalmente, como dito anteriormente,

reduzir-se à função clássica ao desprezarmos termos de ordens \hbar^2 ou superiores, isto é, quando fazemos $\hbar \rightarrow 0$. Utilizando essa função, poderemos utilizar o ferramental da mecânica estatística clássica para resolver problemas em um sistema quântico, constituindo dessa forma um método semiclássico.

3.1 MATRIZ DE WIGNER

Para levarmos em conta os efeitos relativísticos e de spin, no entanto, devemos ir além e definir uma função de Wigner covariante de um corpo. Como pode ser encontrado na literatura, essa definição não é única, e também tem a propriedade de não ser estritamente positiva, o que não nos permite interpretá-la de maneira rigorosa como uma distribuição de probabilidades. Ainda assim, tal função se revela muito útil para resolver os problemas que procuramos atacar. Definimos (VASAK et al., 1987; SAFANELLI, 2010) a função para um férmion como segue:

$$F(x, \Pi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} \left\langle : \hat{\psi}(x + \frac{R}{2}) \otimes \hat{\psi}(x - \frac{R}{2}) : \right\rangle, \quad (3.2)$$

onde a notação que representa as coordenadas espaciais foi mudada de r para x por motivos de clareza. Esta é chamada matriz de Wigner, e possui os seguintes elementos de matriz, reais:

$$F_{\alpha,\beta}(x, \Pi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} \left\langle : \hat{\psi}_\beta(x + \frac{R}{2}) \hat{\psi}_\alpha(x - \frac{R}{2}) : \right\rangle, \quad (3.3)$$

sendo que acima a notação $\left\langle : \hat{\psi}_\beta(x + \frac{R}{2}) \hat{\psi}_\alpha(x - \frac{R}{2}) : \right\rangle$ representa a média estatística quântica sobre o produto de operadores em ordenamento normal, e os índices α e β correm de 1 a 8, levando em conta todos os graus de liberdade de nêutrons e prótons.

Para considerarmos a assimetria de isospin, ou seja, realizar a diferenciação entre prótons e nêutrons, notamos que o momento generalizado Π^μ assume formas diferentes para cada um. No modelo σ - ω mais simples, onde desconsideramos o campo vetorial-isovetorial do méson ρ , podemos escrever o momento generalizado ou canônico Π^μ em função do momento cinético p^μ e dos campos como se segue:

$$\Pi_p^\mu = p^\mu + eA^\mu + g_v \omega^\mu, \quad (3.4)$$

$$\Pi_n^\mu = p^\mu + g_v \omega^\mu. \quad (3.5)$$

Podemos escrever uma matriz de Wigner para cada espécie da seguinte forma, com $i = p, n$:

$$F_i(x, \Pi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 R e^{-i\Pi_i^\mu R_\mu} \left\langle : \hat{\psi}_i(x + \frac{R}{2}) \otimes \hat{\psi}_i(x - \frac{R}{2}) : \right\rangle. \quad (3.6)$$

Os elementos de matriz são bastante similares ao caso simétrico, mas os índices α e β agora vão de 1 a 4 para cada matriz, onde antes corriam de 1 a 8, levando em conta todos os graus de liberdade de nêutrons e prótons.

A formulação de Wigner, utilizando as definições acima, é muito útil pois permite a avaliação de valores esperados de operadores. Consideremos um operador aditivo \hat{O} , a princípio independente do isospin, que pode ser decomposto como:

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi_0 | \hat{O} | \Psi_0 \rangle = \sum \lambda \langle \lambda | \hat{O}_1 | \lambda \rangle n_\lambda, \quad (3.7)$$

onde λ são os números quânticos do sistema e n_λ os pesos estatísticos dos estados ligados a esses números quânticos. Podemos, então, reescrever o valor esperado do operador em termos dos operadores de campo:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O} \rangle &= \left\langle : \int d^4x \hat{\psi}(x) \hat{O}_1(x) \hat{\psi}(x) : \right\rangle \\
&= \left\langle : \int d^4x \hat{\psi}_p(x) \hat{O}_1(x) \hat{\psi}_p(x) + \int d^4x \hat{\psi}_n(x) \hat{O}_1(x) \hat{\psi}_n(x) : \right\rangle \\
&= \int d^4x Sp[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\psi}_p(x) \otimes \hat{\psi}_p(x) : \rangle] \\
&\quad + \int d^4x Sp[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\psi}_n(x) \otimes \hat{\psi}_n(x) : \rangle] \\
&= \int d^4x d^4R \delta^{(4)}(R) Sp[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\psi}_p(x + \frac{R}{2}) \otimes \hat{\psi}_p(x - \frac{R}{2}) : \rangle] \\
&\quad + \int d^4x d^4R \delta^{(4)}(R) Sp[\hat{O}_1(x) \langle : \hat{\psi}_n(x + \frac{R}{2}) \otimes \hat{\psi}_n(x - \frac{R}{2}) : \rangle] \\
&= \int d^4x d^4\Pi_p Sp[\hat{O}_1 F_p] + \int d^4x d^4\Pi_n Sp[\hat{O}_1 F_n],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde Sp denota o traço sobre os índices espinoriais α e β . Assim fica claro que a função de Wigner é uma ferramenta análoga à função de distribuição clássica, para um sistema quântico, permitindo a obtenção dos valores esperados de operadores. As densidades bariônica e escalar, por exemplo, podem ser escritas compactamente da seguinte forma:

$$\rho(x) = \langle \hat{\psi} \gamma^0 \hat{\psi} \rangle = \int d^4\Pi Sp[\gamma^0 F(x, \Pi)], \tag{3.9}$$

$$\rho_s(x) = \langle \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle = \int d^4\Pi Sp[F(x, \Pi)]. \tag{3.10}$$

Realizaremos uma mudança de variável do momento generalizado Π para o momento cinético p , com jacobiano igual a 1 para os casos de interesse. Podemos, então, escrever a densidade de prótons ou nêutrons da seguinte forma:

$$\rho_i(x) = \int d^4p Sp[\gamma^0 F_i(x, p)] = \int d^3p f_i(\vec{r}, \vec{p}, t), \tag{3.11}$$

com:

$$f_i(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int dp^0 Sp[\gamma^0 F_i(x, p)]. \tag{3.12}$$

3.2 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Vamos deduzir em seguida a equação de movimento para a matriz de Wigner. Realizaremos todo o cálculo para os prótons, no entanto um raciocínio idêntico resulta na equação para os nêutrons. Tomaremos a equação para os operadores de campo do próton na aproximação de Hartree, considerando apenas a contribuição dos campos mesônicos σ e ω . A equação é:

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v\omega^\mu - eA^\mu(x)) - (m_p - g_s\sigma(x))]\hat{\psi}_p(x) = 0. \quad (3.13)$$

Fazendo as trocas de variáveis $x_1 = x + \frac{R}{2}$ e $x_2 = x - \frac{R}{2}$ nos elementos de matriz dados pela equação (3.3), e derivando em relação a x_μ , obtemos:

$$[\partial^\mu - 2i\Pi^\mu]F = \frac{2}{(2\pi)^4} \int d^4R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} \left\langle : \hat{\bar{\psi}}(x_1) \otimes (\partial_{x_2}^\nu \hat{\psi}(x_2)) : \right\rangle \quad (3.14)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu(\partial^\mu - 2i\Pi^\mu) + 2im]F &= \frac{2}{(2\pi)^4} \int d^4R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} \\ &\quad \left\langle : \hat{\bar{\psi}}(x_1) \otimes [(\gamma_\nu \partial_{x_2}^\nu + im)\hat{\psi}(x_2)] : \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde suprimimos o índice p . Reescrevendo a equação (3.13):

$$(\gamma_\mu \partial^\mu + im)\hat{\psi}_p(x) = i(g_s\sigma(x) - g_v\gamma_\mu\omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x))\hat{\psi}_p(x), \quad (3.16)$$

de forma que o lado direito da equação (3.15) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} \\ \left\langle : \hat{\bar{\psi}}(x_1) \otimes (g_s\sigma(x_2) - g_v\gamma_\mu\omega^\mu(x_2) - e\gamma_\mu A^\mu(x_2))\hat{\psi}(x_2) : \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Na aproximação de campo médio, podemos extrair os campos

do cálculo da média, pois consideramos que seu valor é igual ao valor esperado, em média. Também podemos reescrevê-los nas coordenadas originais x e R , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma(x_2) &= \sigma\left(x - \frac{r}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} \sigma(x) \\ \omega^\mu(x_2) &= \omega^\mu\left(x - \frac{r}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} \omega^\mu(x) \\ A^\mu(x_2) &= A^\mu\left(x - \frac{r}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} A^\mu(x),\end{aligned}\tag{3.18}$$

de maneira que a equação (3.17) fica:

$$\begin{aligned}& \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} e^{-\frac{1}{2}R_\mu \partial_x^\mu} (g_s \sigma(x) g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e \gamma_\mu A^\mu(x)) \\ & \left\langle : \hat{\psi}(x_1) \otimes \hat{\psi}(x_1) : \right\rangle \\ &= \frac{2i}{(2\pi)^4} e^{-\frac{1}{2}\partial_\Pi^\mu \partial_x^\mu} \int d^4R e^{-i\Pi^\mu R_\mu} (g_s \sigma(x) g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e \gamma_\mu A^\mu(x)) \\ & \left\langle : \hat{\psi}(x_1) \otimes \hat{\psi}(x_1) : \right\rangle \\ &= 2ie^{-\frac{1}{2}\partial_\Pi^\mu \partial_x^\mu} (g_s \sigma(x) g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e \gamma_\mu A^\mu(x)) F.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Substituindo este resultado na equação de movimento para o campo bariônico, equação (3.15), chegamos a uma equação de movimento para a matriz de Wigner:

$$\begin{aligned}[\gamma_\mu (\partial^\mu - 2i\Pi^\mu) + 2im] F(x, \Pi) = \\ 2ie^{-\frac{1}{2}\partial_\Pi^\mu \partial_x^\mu} (g_s \sigma(x) g_v \gamma_\mu \omega^\mu(x) - e \gamma_\mu A^\mu(x)) F(x, \Pi).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Esta equação matricial representa um conjunto de 16 equações diferenciais acopladas, de solução extremamente difícil. Mas podemos utilizar duas aproximações para tornar o problema mais tratável, e reduzir a equação acima à forma funcional da equação de Vlasov. A primeira consiste em considerar que a matriz de Wigner seja suave no espaço de configurações e que, portanto, podemos desprezar as ordens acima da primeira nas derivadas sem afetar desproporcionalmente o resultado. A segunda é a aproximação de spin saturado, que admite

que não há contribuições do spin para as correntes calculadas através da função de Wigner.

3.3 APROXIMAÇÃO DE LIMITE CLÁSSICO

Começando pela aproximação da suavidade da matriz de Wigner, também chamada de limite clássico por desprezar efeitos que surgem apenas quanticamente, iremos expandir a equação (3.20) em ordens de \hbar e manter somente a primeira ordem. Explicitando \hbar na equação, temos:

$$[\gamma_\mu(\hbar\partial^\mu - 2i\Pi^\mu) + 2im]F = 2ie^{-\frac{1}{2}\hbar\partial_\Pi^\mu\partial_x^\mu}(g_s\sigma(x)g_v\gamma_\mu\omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x))F. \quad (3.21)$$

Tomando apenas a primeira ordem ao expandir o operador exponencial, obtemos:

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu(\hbar\partial^\mu - 2i\Pi^\mu) + 2im]F &= 2i\left(1 - \frac{1}{2}\hbar\partial_\nu^\Pi\partial_x^\mu\right) \\ &\cdot (g_s\sigma(x)g_v\gamma_\mu\omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x))F, \\ 2i[-\gamma_\mu(\Pi^\mu - g_v\omega^\mu - e\gamma_\mu A^\mu) + m - g_s\sigma]F &= -\gamma_\mu\hbar\partial^\mu F + \hbar\partial_\nu^\Pi\partial_x^\mu \\ &\cdot (g_s\sigma(x)g_v\gamma_\mu\omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x))F. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Da maneira que definimos a matriz de Wigner, sabemos que ela tem elementos de matriz reais, como visto na equação (3.3). Sendo assim, as partes real e imaginária da equação acima devem ser satisfeitas de maneira independente. A parte imaginária nos dá:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m^*)F = 0, \quad (3.23)$$

com $p^\mu = \Pi^\mu - g_v\omega^\mu - eA$ e $m^* = m - g_s\sigma$. Já a parte real nos oferece:

$$[\gamma_\mu\partial^\mu - \partial_\mu^\Pi\partial_x^\mu(g_s\sigma(x)g_v\gamma_\mu\omega^\mu(x) - e\gamma_\mu A^\mu(x))]F = 0, \quad (3.24)$$

onde novamente fizemos $\hbar = 1$.

De maneira geral, qualquer matriz 4x4 pode ser decomposta em uma base de 16 matrizes. Conforme demonstrado em (ITZYKSON; ZUBER, 1980), uma base completa para as matrizes $\bar{\psi} \otimes \psi$ é dada por:

$$\Gamma^i = \left\{ \mathbf{1}_4, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5 \right\}. \quad (3.25)$$

A matriz de Wigner pode ser, portanto, decomposta nessa base, e levando em conta as aproximações com as quais estamos trabalhando, vários componentes dessa decomposição se tornam nulos. Desta forma, podemos escrever a matriz de Wigner como:

$$F = \frac{1}{4} Sp[F] + \gamma^\mu \frac{1}{4} Sp[\gamma_\mu F] = \mathcal{F} + \gamma^\mu \mathcal{V}_\mu. \quad (3.26)$$

Aplicando o traço nos índices espinoriais na equação (3.23) e usando a expansão da matriz na base, temos:

$$\begin{aligned} Sp[\gamma_\mu p^\mu F] &= Sp[M^* F] \\ p^\mu \mathcal{V}_\mu &= M^* \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Fazendo o mesmo para a equação (3.24):

$$\begin{aligned} Sp[\partial_\nu^\Pi \partial_x^\mu g_s \sigma(x) F] &= Sp\{[\gamma_\mu \partial^\mu + \partial_\mu^\Pi \partial_x^\mu (g_v \omega_\mu(x) \gamma^\mu - e A_\mu(x) \gamma^\mu)] F\} \\ &\times [\partial^\mu + \partial_\nu^\Pi \partial_x^\mu (g_v \omega_\mu(x) - e A_\mu(x))] \mathcal{V} \\ &= g_s \partial_\nu^\Pi \partial_x^\mu (\sigma(x) \mathcal{F}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Multiplicando a equação (3.23) por $(\gamma_\nu p^\nu + m^*)$ e considerando F não nula, temos:

$$\begin{aligned} [(\gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu) - M^{*2}] F &= 0 \\ [(\gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu) - M^{*2}] \mathbf{1}_4 &= 0 \\ Sp[(\gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu) - M^{*2}] \mathbf{1}_4 &= 4g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu - 4M^{*2} = 0 \\ p^2 &= M^{*2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Esta última é conhecida como condição de camada de massa. Com ela, mais a equação (3.27), podemos reescrever a equação (3.28):

$$\begin{aligned}
& [\partial_\mu + \partial_\nu^\Pi \partial_x^\mu (g_v \omega_\mu(x) - eA_\mu(x))] p^\mu \frac{\mathcal{F}}{M^*(x)} \\
& = -M^*(x) [\partial_\nu^\Pi \partial_x^\mu M^*(x)] \frac{\mathcal{F}}{M^*(x)}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Utilizando as restrições:

$$\partial_\mu \omega^\mu = 0, \tag{3.31}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{3.32}$$

onde esta última é a condição de Lorenz, calculamos o seguinte comutador:

$$[\partial_\mu + \partial_\nu^\Pi \partial_x^\mu (g_v \omega_\mu(x) - eA_\mu(x)), p^\mu] = 0. \tag{3.33}$$

Usando isto na equação (3.30), obtemos:

$$[p_\mu \partial_x^\mu + (g_v p_\mu \partial_x^\nu \omega^\mu + e p_\mu \partial_x^\nu A^\mu) \partial_\nu^\Pi + M^*(\partial_x^\nu M^*) \partial_\nu^\Pi] \frac{\mathcal{F}}{M^*} = 0. \tag{3.34}$$

Se realizarmos a mudança de variáveis do momento generalizado Π para o cinético p , devemos trocar a derivada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
[\partial_x^\mu \mathcal{F}(x, \Pi)] &= [\partial_x^\mu \mathcal{F}(x, p)] - g_v (\partial_x^\mu \omega^\nu(x)) \partial_\nu^p \mathcal{F}(x, p) \\
&\quad - e (\partial_x^\mu A^\nu(x)) \partial_\nu^p \mathcal{F}(x, p).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

A derivada em relação aos momentos fica inalterada, como já comentamos. Fazendo a mudança de variáveis nas derivadas da equação (3.34):

$$\begin{aligned}
& [p_\mu \partial_x^\mu + g_v p_\mu (\partial_x^\nu \omega^\mu - \partial_x^\mu \omega^\nu) \partial_\mu^p + e p_\mu (\partial_x^\nu A^\mu - \partial_x^\mu A^\nu) \partial_\mu^p \\
& \quad + M^*(\partial_x^\nu M^*) \partial_\nu^p] \frac{\mathcal{F}(x, p)}{M^*} = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Podemos escrever esta equação de maneira mais compacta como:

$$[p_\mu \partial_x^\mu + (g_\nu p_\mu \Omega^{\nu\mu} + e p_\nu F^{\nu\mu}) \partial_\nu^p + M^* (\partial_x^\nu M^*) \partial_\nu^p] \frac{\mathcal{F}(x, p)}{M^*} = 0, \quad (3.37)$$

onde $\Omega^{\nu\mu} = (\partial_x^\nu \omega^\mu - \partial_x^\mu \omega^\nu)$ e $F^{\nu\mu} = (\partial_x^\nu A^\mu - \partial_x^\mu A^\nu)$. Esta é a equação de Vlasov na sua forma covariante, o que pode ser visto explicitando a parte temporal da equação e substituindo as derivadas dos campos pelas forças e velocidades relacionadas, de forma a obter um análogo à equação clássica com a mesma forma funcional.

4 DINÂMICA NUCLEAR COM CAMPO MAGNÉTICO NULO

Este capítulo está dedicado a demonstrar a equivalência do método que usaremos àquele usado na referência (BRITO et al., 2006) para calcular a função de dispersão para uma perturbação longitudinal na matéria nuclear. Com isso pretendemos justificar o uso do método, no sentido de que podemos obter uma boa função de distribuição que descreve o sistema quântico através do método da função de Wigner.

4.1 RELAÇÃO DE DISPERSÃO

No capítulo anterior, chegamos à equação (3.37), que afirmamos ser uma equação do tipo Vlasov para o caso quântico. Escreveremos esta equação de maneira diferente para posteriormente justificar a maneira de adicionar a contribuição do campo isovetorial-vetorial do méson ρ e outras correções ao modelo:

$$[p_\mu \partial_x^\mu + (p_\mu (\partial_x^\nu \mathcal{V}^\mu) + M^* (\partial_x^\nu M^*)) \partial_{p\nu}] \frac{\mathcal{F}(x, \Pi)}{M^*} = 0, \quad (4.1)$$

onde Π é o momento canônico, e os campos ω e eletromagnético foram colocados na forma do potencial \mathcal{V}_μ , de forma que:

$$p^\mu = \Pi^\mu - \mathcal{V}^\mu(x). \quad (4.2)$$

Por conveniência, realizaremos uma mudança de variáveis de (x, Π) para (x, p) , com $R^\mu = x^\mu$ e $p^\mu = \Pi^\mu - \mathcal{V}^\mu$. Vamos escrever a função de distribuição quântica como:

$$f(x, p) = \frac{\mathcal{F}(x, \Pi)}{M^*}. \quad (4.3)$$

Nas novas coordenadas, a equação (4.1) fica:

$$[p_\mu \partial_x^\mu - p_\mu \tilde{\Omega}^{\mu\nu} \partial_{p\nu} + M^* (\partial_x^\nu M^*) \partial_{p\nu}] f(x, p) = 0, \quad (4.4)$$

onde $\tilde{\Omega}^{\mu\nu} = (\partial_x^\mu \mathcal{V}^\nu - \partial_x^\nu \mathcal{V}^\mu)$. A partir deste ponto vamos omitir o til para simplificar a notação, embora deva ficar claro que o $\Omega^{\mu\nu}$ definido desta forma é diferente daquele do capítulo anterior.

Vamos calcular as correntes bariônica e escalar a partir da função de distribuição $f(x, \Pi)$. Para isto, usaremos um ansatz para esta função:

$$f(x, p) = 2\theta(p_0)\delta(p^2 - M^{*2})\tilde{f}(x, \vec{p}) = \frac{1}{p_0}\delta(p_0 - \sqrt{p^2 - M^{*2}})\tilde{f}(x, \vec{p}). \quad (4.5)$$

As densidades de correntes escalar e bariônica são definidas respectivamente por:

$$\rho_s = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^4p \, m^*(x) f(x, p), \quad (4.6)$$

$$j^\mu = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^4p \, p^\mu f(x, p). \quad (4.7)$$

Devido à função delta no ansatz para a função de distribuição, essas integrais no quadrimomento cinético se reduzem a integrais tridimensionais:

$$\int d^4p \, f(x, p) \rightarrow \int \frac{d^3p}{p^0} \tilde{f}(x, \vec{p}). \quad (4.8)$$

Substituindo nas equações (4.6) e (4.7), e omitindo o til da notação, obtemos:

$$\rho_s = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} m^*(x) f(x, p), \quad (4.9)$$

$$j^\mu = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p). \quad (4.10)$$

Substituindo novamente na equação (4.4) e efetuando um pouco de álgebra, é possível mostrar que temos a conservação da corrente bariônica, ou seja:

$$\partial_{x\mu} j^\mu = 0. \quad (4.11)$$

Agora, usando o comutador:

$$[p_\mu \partial_x^\mu - p_\mu \tilde{\Omega}^{\mu\nu} \partial_{p\nu} + M^* (\partial_x^\nu M^*) \partial_{p\nu}, \delta(p^2 - M^{*2})] = 0, \quad (4.12)$$

podemos reescrever a equação (4.4) como:

$$[p_\mu \partial_x^\mu - p_\mu \tilde{\Omega}^{\mu k} \partial_{p_k} + M^* (\partial_x^k M^*) \partial_{p_k}] f(x, \vec{p}) = 0, \quad (4.13)$$

com k indo de 1 a 3. Desta forma, a equação pode ser escrita com a forma funcional da equação de Vlasov usual:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}_x + \dot{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla}_p \right] f(x, \vec{p}) = 0, \quad (4.14)$$

onde:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{p^0} = \frac{\vec{p}}{E_p}, \quad (4.15)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{V}} - \vec{\nabla}_x \mathcal{V}^0 + \frac{1}{p^0} \left[\vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}) - M^* \vec{\nabla}_x M^* \right], \quad (4.16)$$

sendo que a equação (4.13) é equivalente à equação com a derivada total no tempo:

$$\frac{d}{dt} f(x, \vec{p}) = \frac{d}{dt} f(x, \vec{p}, t) = 0. \quad (4.17)$$

Para a matéria homogênea em equilíbrio a temperatura nula, sabemos que devemos ter $f(x, \vec{p}) = \theta(E_F - E_p)$, onde $E_F = \sqrt{p_F^2 + m^{*2}}$ é a energia de Fermi. Desta maneira obtemos as densidades escalar e bariônica de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^0} M^* \theta(E_F - E_p) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{p_F} dp p^2 \frac{M^*}{E_p} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_F} dp \frac{p^2 M^*}{\sqrt{p^2 + M^{*2}}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
\rho = j^0 &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^0} p^0 \theta(E_F - E_p) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int dp p^2 \theta(E_F - E_p) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{p_F} dp p^2 = \frac{p_F^3}{3\pi^2}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Agora, no caso de uma pequena perturbação em relação ao equilíbrio, na matéria nuclear uniforme na ausência de campos externos, podemos escrever para a função de distribuição:

$$f(x, \vec{p}) = f^{(0)}(\vec{p}) + \delta f(x, \vec{p}), \tag{4.20}$$

e a equação de Vlasov pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} (f^{(0)} + \delta f) + \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} (f^{(0)} + \delta f) \\
&+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{p^2 + (m - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi))^2}} [\vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times (\vec{\mathcal{V}}^{(0)} + \delta\vec{\mathcal{V}})) \right. \\
&- (m - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi)) \vec{\nabla}_x (m - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi))] \\
&- \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathcal{V}}^{(0)} + \delta\vec{\mathcal{V}}) - \vec{\nabla}_x (\mathcal{V}^{(0)0} + \delta\mathcal{V}^0) \} \\
&\cdot \vec{\nabla}_p (f^{(0)} + \delta f) = 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Expandindo a raiz no denominador em série de potências, temos para o termo envolvendo derivadas no momento:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{E^{(0)}} + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)3}} g_s \delta\phi \right) (\vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}^{(0)}) + \vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \delta\vec{\mathcal{V}}) \\
&- M^{*(0)} \vec{\nabla}_x \delta\phi - M^{*(0)} \vec{\nabla}_x M^{*(0)}) \cdot (\vec{\nabla}_p f^{(0)} + \vec{\nabla}_p \delta f) \\
&= \left\{ \left(\frac{1}{E^{(0)}} + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)3}} g_s \delta\phi \right) [\vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}^{(0)}) \right. \\
&+ \vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \delta\vec{\mathcal{V}}) + M^{*(0)} g_s \delta\phi] \cdot (\vec{\nabla}_p f^{(0)} + \vec{\nabla}_p \delta f) \}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Portanto, a equação de Vlasov para a flutuação na função de distribuição é:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \delta f + \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot \vec{\nabla}_x \delta f + \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}^{(0)}) \cdot \vec{\nabla}_p \delta f \\
& - \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{V}}^{(0)} + \vec{\nabla}_x \vec{\mathcal{V}}^{(0)} \right) \cdot \vec{\nabla}_p \delta f \\
& + \left[\frac{\vec{p}}{E^{(0)}} (\vec{\nabla}_x \times \delta \vec{\mathcal{V}}) + \frac{M^{*(0)} g_s}{E^{(0)}} \vec{\nabla}_x \delta \phi + \frac{M^{*(0)} g_s}{E^{(0)3}} \delta \phi \left(\vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}^{(0)}) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{\mathcal{V}} - \vec{\nabla}_x \delta \mathcal{V}' \right] \cdot \vec{\nabla}_p \delta f^{(0)} = 0,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

onde consideramos que $\vec{\nabla}_x \phi^{(0)} = 0$. Na ausência de campos externos, $\vec{\mathcal{V}} = 0$, e \mathcal{V}^0 é constante. Portanto a equação (4.23) se reduz a:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \delta f + \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot \vec{\nabla}_x \delta f \\
& + \left[\frac{\vec{p}}{E^{(0)}} (\vec{\nabla}_x \times \delta \vec{\mathcal{V}}) + \frac{M^{*(0)} g_s}{E^{(0)}} \vec{\nabla}_x \delta \phi \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{\mathcal{V}} - \vec{\nabla}_x \delta \mathcal{V}' \right] \cdot \vec{\nabla}_p \delta f^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Realizando uma transformada de Fourier na equação, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int d^3 q d\omega e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{r})} \\
& [\omega \delta f + \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot (-i\vec{q}) \delta f - i \left(\frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}} \vec{q} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}} \delta \vec{\mathcal{V}} \right) \cdot \vec{\nabla}_p \delta f^{(0)}] \\
& + \left(\frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \delta \phi (-i\vec{q}) - i\omega \delta \vec{\mathcal{V}} + \delta \mathcal{V}^0 i\vec{q} \right) \cdot \vec{\nabla}_p \delta f^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Podemos reescrever a equação como:

$$\begin{aligned}
& i \left(\omega - \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot \vec{q} \right) \delta f(\vec{q}, \vec{p}, \omega) = \\
& i \left[\left(\omega - \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot \vec{q} \right) \delta \vec{\mathcal{V}}(\vec{q}, \vec{p}, \omega) - (\delta \mathcal{V}^0 \right. \\
& \left. - \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}} - \frac{m^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \delta \phi) \vec{q} \right] \cdot \vec{\nabla}_p \delta f^{(0)},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

ou seja:

$$\delta f = \left[\delta \vec{\mathcal{V}} - \frac{\left(\delta \mathcal{V}^0 - \frac{\vec{p}}{E^{(0)}} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}} - \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \delta \phi \right) \vec{q}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right] \cdot \vec{\nabla}_p \delta f^{(0)}. \quad (4.27)$$

Para obtermos as relações de dispersão, vamos analisar as densidades de corrente bariônica e escalar:

$$j^\mu = j^{(0)\mu} + \delta j^\mu, \quad (4.28)$$

$$\rho_s = \rho_s^{(0)} + \delta \rho_s, \quad (4.29)$$

de maneira que, para a parte temporal da densidade de corrente bariônica temos, de acordo com a equação (4.10):

$$j^0 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^0} p^0 (f^{(0)} + \delta f), \quad (4.30)$$

e então:

$$\delta j^0 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \delta f, \quad (4.31)$$

pois a variação da densidade de corrente bariônica é uma variação em $m^{*(0)}$, mas a função de distribuição de equilíbrio, $f^{(0)}$ não depende de m^* .

A parte espacial da densidade de corrente bariônica fica:

$$\begin{aligned} j^k(x) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p^k}{\sqrt{p^2 + (m - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi))^2}} (f^{(0)} + \delta f) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^k \left(\frac{1}{E^{(0)}} + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)3}} g_s \delta\phi \right) (f^{(0)} + \delta f) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p p^k \left[\frac{1}{E^{(0)}} f^{(0)} + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)3}} g_s \delta\phi + \frac{\delta f}{E^{(0)}} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Analisando a equação de movimento, vemos que $\delta\phi$ não é função de p^k , e portanto os últimos termos ficam:

$$\int d^3 p p^k \frac{1}{E^{(0)3}} = \int d^3 p p^k f(|\vec{p}|) = 0, \quad (4.33)$$

de maneira que:

$$j^k(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E^{(0)}} p^k \delta f. \quad (4.34)$$

Agora, para a densidade escalar, temos:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} M^*(f^{(0)} + \delta f) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{(m - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi))}{\sqrt{p^2 + (m - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi))^2}} (f^{(0)} + \delta f) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\frac{1}{E^{(0)}} + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)3}} g_s \delta\phi \right) (M^{*(0)} - g_s \delta\phi) (f^{(0)} + \delta f) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{f^{(0)}}{E^{(0)}} M^{*(0)} \\ &\quad + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} \delta f - \frac{f^{(0)}}{E^{(0)}} g_s \delta\phi + \frac{M^{*(0)2}}{E^{(0)3}} f^{(0)} g_s \delta\phi \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Notando que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M^*} \rho_s^{(0)} &= \frac{\partial}{\partial M^{*(0)}} \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} f^{(0)} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \left[\frac{f^{(0)}}{E^{(0)}} + M^{*(0)} \frac{\partial}{\partial M^{*(0)}} \frac{f^{(0)}}{E^{(0)}} \right] \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \left[\frac{f^{(0)}}{E^{(0)}} + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} \frac{\partial}{\partial M^{*(0)}} f^{(0)} - \frac{M^{*(0)2}}{E^{(0)3}} f^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

podemos escrever:

$$\delta\rho_s = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} \delta f - g_s d\rho_s^{(0)} \delta\phi, \quad (4.37)$$

onde:

$$d\rho_s^{(0)} = \frac{\partial}{\partial M^*} \rho_s^{(0)} - \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} \frac{\partial}{\partial m^*} f^{(0)}. \quad (4.38)$$

Vamos calcular as transformadas de Fourier e somar as contribuições de prótons, nêutrons e elétrons:

$$\delta j^\mu(\vec{q}, \omega) = \sum_{i=p,n,e} \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu \delta f_i(\vec{q}, \vec{p}, \omega) \quad (4.39)$$

$$\delta \rho_s(\vec{q}, \omega) = \sum_{i=p,n} \left[\frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} M^{*(0)} \delta f_i - g_s \left(\frac{\partial}{\partial M^{*(0)}} \rho_{is}^{(0)} \right) \delta \phi(\vec{q}, \omega) \right]. \quad (4.40)$$

Usando a equação de movimento do campo escalar ϕ no modelo de Walecka não linear, equação (2.62), e considerando as perturbações no campo e na densidade escalar:

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 \delta \phi - \nabla^2 \delta \phi + M^{*2} \delta \phi + k \phi^{(0)} \delta \phi + \frac{\lambda}{2} \phi^{(0)2} \delta \phi \\ &= g_s \sum_{i=p,n} \left[\frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} M^{*(0)} \delta f_i - g_s \left(\frac{\partial}{\partial M^{*(0)}} \rho_{is}^{(0)} \right) \phi^{(0)} \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

e definindo:

$$\tilde{m}_s^2 \equiv m_s^2 + k \phi^{(0)} + \frac{\lambda}{2} \phi^{(0)2} + g_s^2 \sum_{i=p,n} \frac{\partial}{\partial M^{*(0)}} \rho_{is}^{(0)}, \quad (4.42)$$

podemos reescrever a equação (4.41) como:

$$\partial_t^2 \delta \phi - \nabla^2 \delta \phi + \tilde{m}_s^2 \delta \phi = g_s \sum_{i=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} M^{*(0)} \delta f_i. \quad (4.43)$$

Fazendo a transformada de Fourier, obtemos:

$$[-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_s^2] \delta \phi(\vec{q}, \omega) = g_s M^{*(0)} \sum_{j=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E^{(0)}} \delta f_j(\vec{q}, \vec{p}, \omega). \quad (4.44)$$

Analogamente, para os campos mesônicos ω e ρ , e para o campo eletromagnético, respectivamente, obtemos:

$$[-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\omega^2] \delta V^\mu(\vec{q}, \omega) = g_v \sum_{j=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^{(0)}} p^\mu \delta f_j \quad (4.45)$$

$$[-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\rho^2] \delta b^\mu(\vec{q}, \omega) = \frac{g_\rho}{2} \sum_{j=p,n} \tau_j \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^{(0)}} p^\mu \delta f_j \quad (4.46)$$

$$[-\omega^2 + q^2] \delta A^\mu(\vec{q}, \omega) = e \left[\frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^{(0)}} p^\mu \delta f_p - \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} p^\mu \delta f_e \right], \quad (4.47)$$

onde $\tau_p = 1$ e $\tau_n = -1$. Como no nosso modelo temos:

$$\delta \mathcal{V}_i^\mu = g_v \delta V^\mu + \frac{g_\rho}{2} \delta b^\mu + e \frac{1 + \tau_i}{2} \delta A^\mu, \quad (4.48)$$

usando as equações (4.45) a (4.47), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V}_i^\mu &= \frac{g_v^2}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\omega^2} \sum_{j=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^{(0)}} p^\mu \delta f_j \\ &+ \frac{(\frac{g_\rho}{2})^2 \tau_i}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\rho^2} \sum_{j=p,n} \tau_j \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^{(0)}} p^\mu \delta f_j \\ &+ \frac{e^2 (\frac{1+\tau_i}{2})}{-\omega^2 + q^2} \left[\frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^{(0)}} p^\mu (\delta f_p - \delta f_e) \right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Definindo:

$$\delta j_i^\mu \equiv \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^{(0)}} p^\mu \delta f_j(\vec{q}, \vec{p}, \omega), \quad (4.50)$$

temos:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V}_i^\mu(\vec{q}, \omega) &= \sum_{j=p,n} \left[\frac{g_v^2}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\omega^2} + \frac{(\frac{g_\rho}{2})^2 \tau_i \tau_j}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\rho^2} \right] \\ &+ \frac{e^2 (\frac{1+\tau_i}{2})}{-\omega^2 + q^2} (\delta j_p^\mu - \delta j_e^\mu). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Substituindo na equação (4.27) a equação de Vlasov covariante,

$$\begin{aligned}
\delta f_i &= \delta \mathcal{V}_i^k \frac{\partial}{\partial p^k} f_i^{(0)} - \frac{\left(\delta \mathcal{V}_i^0 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{V}}_i}{E^{(0)}} - \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \delta \phi \right)}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)} \\
&= \delta \mathcal{V}_i^k \left[\frac{\partial}{\partial p^k} f_i^{(0)} + \frac{\frac{p^k}{E^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right] - \frac{\delta \mathcal{V}_i^0 \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \\
&\quad + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \delta \phi.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Usando as equações (4.44) e (4.51), reescrevemos:

$$\begin{aligned}
\delta f_i &= \left[\sum_{j=p,n} \left(\frac{g_v^2}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\omega^2} + \frac{(\frac{g_\rho}{2})^2 \tau_i \tau_j}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\rho^2} \right) \delta j_j^k \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^2 (\frac{1+\tau_i}{2})}{-\omega^2 + q^2} (\delta j_p^k - \delta j_e^k) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial p^k} f_i^{(0)} + \frac{\frac{p^k}{E^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right] \\
&\quad + \left[\sum_{j=p,n} \left(\frac{g_v^2}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\omega^2} + \frac{(\frac{g_\rho}{2})^2 \tau_i \tau_j}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\rho^2} \right) \delta j_j^0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^2 (\frac{1+\tau_i}{2})}{-\omega^2 + q^2} (\delta j_p^0 - \delta j_e^0) \right] \cdot \left[\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right] \\
&\quad + \frac{M^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \frac{g_s M^{*(0)}}{-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_s^2} \left(\sum_{j=p,n} \delta \tilde{j}_{js} \right) \left[\frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right],
\end{aligned} \tag{4.53}$$

onde definimos:

$$\tilde{\rho}_{js} \equiv \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \delta f_j(\vec{q}, \vec{p}, \omega). \tag{4.54}$$

No caso do elétron, temos $\mathcal{V}_e^\mu = -eA^\mu$ e $\delta \mathcal{V}_e^\mu = -e\delta A^\mu$. Usando a equação (4.47) para o campo eletromagnético:

$$\mathcal{V}_e^\mu = \frac{-e^2}{-\omega^2 + q^2} [\delta j_p^\mu - \delta j_e^\mu]. \tag{4.55}$$

Substituindo na equação (4.52), temos:

$$\begin{aligned}
\delta f_e = & \frac{-e^2}{-\omega^2 + q^2} [\delta j_p^\mu - \delta j_e^\mu] \left(\frac{\partial}{\partial p^k} f_e^{(0)} + \frac{\frac{p^k}{E_e^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_e^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_e^{(0)}}} \right) \\
& + \frac{e^2}{-\omega^2 + q^2} [\delta j_p^0 - \delta j_e^0] \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_e^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_e^{(0)}}},
\end{aligned} \tag{4.56}$$

onde $E_e^{(0)} = \sqrt{p^2 + m_e^2}$.

4.2 ONDAS LONGITUDINAIS

Vamos considerar o caso específico de pequenas perturbações correspondentes a ondas longitudinais em um referencial escolhido. Calcularemos a equação de dispersão, mostrando que nosso método reproduz resultados obtidos anteriormente em outro artigo (BRITO et al., 2006). Para uma onda longitudinal:

$$\delta \vec{\mathcal{V}}_i \equiv \delta \mathcal{V}_{i3}, \tag{4.57}$$

com $i = p, n, e$, e onde os índices 1, 2, 3 representam os eixos coordenados. Portanto, $\delta \mathcal{V}_{i1} = \delta \mathcal{V}_{i2} = 0$. Da mesma forma, $\delta j^1 = \delta j^2 = 0$. A perturbação está limitada apenas à direção escolhida, no caso, 3. Como temos conservação da corrente bariônica, podemos escrever a equação de continuidade:

$$\partial_\mu j_i^\mu(t, \vec{x}) = 0, \tag{4.58}$$

ou de maneira equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i^0(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i(t, \vec{x}) = 0. \tag{4.59}$$

Usamos a transformada de Fourier para obter:

$$\begin{aligned}
i\omega j_i^0(\vec{q}, \omega) - i\vec{q} \cdot \vec{j}_i(\vec{q}, \omega) &= 0 \\
\Rightarrow \omega j_i^0(\vec{q}, \omega) &= \vec{q} \cdot \vec{j}_i(\vec{q}, \omega).
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Como os campos mesônicos também satisfazem equações de conservação:

$$\partial_\mu V_i^\mu = \partial_\mu b_i^\mu = \partial_\mu A_i^\mu = 0 \quad (\text{Calibre de Lorenz}), \quad (4.61)$$

temos:

$$\begin{aligned} \omega \delta V^0 &= \vec{q} \cdot \delta \vec{V} \\ \omega \delta b^0 &= \vec{q} \cdot \delta \vec{b} \\ \omega \delta A^0 &= \vec{q} \cdot \delta \vec{A}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

Observando as equações de movimento dos campos dos mésons ω , ρ e o eletromagnético, equações (4.45) a (4.47), vemos que apenas j_i^3 é diferente de zero. Com a equação de continuidade, equação (4.59), temos:

$$\omega \delta j_i^0 = q_3 \delta j_i^3, \quad (4.63)$$

portanto as densidades de corrente oscilam em relação ao equilíbrio devido à perturbação. Vamos então considerar as integrais envolvidas no cálculo das densidades bariônica e escalar. Em primeiro lugar, a equação de Vlasov, equação (4.52), pode ser escrita no presente caso como:

$$\begin{aligned} \delta f_i &= \delta \mathcal{V}_i^3 \left[\frac{\partial}{\partial p^k} f_i^{(0)} + \frac{\frac{p^3}{E^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right] - \frac{\delta \mathcal{V}_i^0 \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \\ &+ \frac{m^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \delta \phi. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Das equações (4.62), temos que $\omega \delta V^0 = q^3 \delta V^3$. Logo,

$$\begin{aligned} \delta f_i &= \delta \mathcal{V}_i^0 \left[\frac{\omega}{q^3} \left(\frac{\partial}{\partial p^k} f_i^{(0)} + \frac{\frac{p^3}{E^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right) - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right] \\ &+ \frac{m^{*(0)}}{E^{(0)}} g_s \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \delta \phi. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Como:

$$\omega \delta j_i^0 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{p^0} p^0 \delta f_i, \quad (4.66)$$

da equação (4.65) vem que:

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 = & \delta \mathcal{V}_i^0 \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \left[\frac{\omega}{q^3} \left(\frac{\partial}{\partial p^k} f_i^{(0)} + \frac{\frac{p^3}{E^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right) - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \right] \\ & + M^{*(0)} g_s \delta \phi \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{1}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_i^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Na equação que envolve a função de distribuição de equilíbrio, a integral é nula devido à paridade da função $f_i^{(0)} = \theta(E_{Fi} - E_p)$ quando integrada em coordenadas esféricas. Também temos que $\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p = q \hat{k} \cdot \hat{e}_p \frac{\partial}{\partial p} = q \cos \theta \frac{\partial}{\partial p}$. Dessa maneira:

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 = & \delta \mathcal{V}_i^0 \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \left[\frac{\omega}{q^3 E^{(0)}} \left(\frac{p \cos \theta q \cos \theta}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}}} \right) - \frac{q \cos \theta \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)}}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}}} \right] \\ & + M^{*(0)} g_s \delta \phi \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{1}{E^{(0)}} \frac{q \cos \theta \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)}}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}}}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)} &= \frac{\partial}{\partial p} \theta(E_{Fi} - E_p) = \frac{\partial \theta(E_{Fi} - E_p)}{\partial p} \frac{\partial (E_{Fi} - E_p)}{\partial p} \\ &= \delta(E_{Fi} - E_p) \frac{\partial}{\partial p} \left(E_{Fi} - \sqrt{p^2 - M^{*(0)2}} \right) \\ &= -\delta(E_{Fi} - E_p) \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{p^2 - M^{*(0)2}}} \\ &= -\frac{p_{Fi}}{E_{Fi}} \sqrt{p^2 - M^{*(0)2}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

e notando que $\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$, se $f(x_0) \neq 0$ e $f'(x_0) \neq 0$ (assumindo apenas uma raiz), temos:

$$\delta(E_{Fi} - E_p) = \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial p}(E_{Fi} - E_p) \right|} \delta(p_{Fi} - p) = \frac{\delta(p_{Fi} - p) \sqrt{p^2 - M^{*(0)2}}}{|\vec{p}|}, \quad (4.70)$$

e então:

$$\frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)} = -\delta(p_{Fi} - p). \quad (4.71)$$

Agora vamos escrever a equação (4.68) como:

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 &= \delta \mathcal{V}_i^0 \left[\omega \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{p \cos^2 \theta}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}}} \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - q \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{\cos \theta}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}}} \right] \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)} \\ &\quad + M^{*(0)} g_s \delta \phi \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{\cos \theta}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}}} \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde passamos a omitir o índice \mathcal{J} da coordenada q . A expressão para δj_i^0 acima envolve três integrais:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{p \cos^2 \theta}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}}} \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)} \\ &\quad \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty \frac{dp}{E^{(0)}} - \frac{p^3 x^2}{\omega - \frac{pqx}{E^{(0)}}} \delta(p_{Fi} - p) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} p_{Fi}^3 \int_{-1}^1 dx \frac{x^2}{qp_{Fi} \left(\frac{\omega E_{Fi}}{qp_{Fi}} \right)}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Definindo:

$$\omega_{0i} \equiv \frac{qp_{Fi}}{E_{Fi}}, S_i = \frac{\omega}{\omega_{0i}} \quad (4.74)$$

e usando a definição da função de Lindhard:

$$L(x_0) \equiv \int_{-1}^1 dx \frac{x}{x_0 - x}, \quad (4.75)$$

que tem a propriedade:

$$\int_{-1}^1 dx \frac{x^2}{x_0 - x} = -x_0 L(x_0), \quad (4.76)$$

temos:

$$H_1 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi}^2}{q} S_i L(S_i) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\omega}{q^2} p_{Fi} E_{Fi} L(S_i). \quad (4.77)$$

A segunda integral é:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\cos\theta}{\omega - \frac{pq\cos\theta}{E^{(0)}}} \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty dp \frac{p^2 x}{\omega - \frac{pqx}{E^{(0)}}} \delta(p_{Fi} - p) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} p_{Fi}^2 \int_{-1}^1 dx \frac{x}{\frac{qp_{Fi}}{x} E_{Fi} \left(\frac{\omega E_{Fi}}{qp_{Fi}} \right)} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi} E_{Fi}}{q} L(S_i). \end{aligned} \quad (4.78)$$

A terceira integral é:

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E^{(0)}} \frac{\cos\theta}{\omega - \frac{pq\cos\theta}{E^{(0)}}} \frac{\partial}{\partial p} f_i^{(0)} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty dp \frac{p^2}{E^{(0)}} \frac{x}{\omega - \frac{pqx}{E^{(0)}}} \delta(p_{Fi} - p) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} p_{Fi}^2 \int_{-1}^1 dx \frac{x}{qp_{Fi} \left(\frac{\omega E_{Fi}}{qp_{Fi}} \right)} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi}}{q} L(S_i) = \frac{H_2}{E_{Fi}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Substituindo na equação (4.72):

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 &= \delta \mathcal{V}_i^0 L(S_i) \left[\omega \frac{1}{2\pi^2} \frac{\omega}{q^2} p_{Fi} E_{Fi} - \frac{1}{2\pi^2} p_{Fi} E_{Fi} \right] \\ &\quad + m^{*(0)} g_s \delta \phi L(S_i) \frac{1}{2\pi^2} p_{Fi}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

ou de maneira mais compacta:

$$\delta j_i^0 = -\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) p_{Fi} E_{Fi} L(S_i) \delta \mathcal{V}_i^0 + \frac{1}{2\pi^2} p_{Fi} L(S_i) M^{*(0)} g_s \delta \phi. \quad (4.81)$$

Para eliminar $\delta \phi$ vamos utilizar as equações (4.44) e (4.65). Escrevemos:

$$[-\omega^2 + \omega_s^2] \delta \phi = g_s M^{*(0)} \sum_{j=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \delta f_j, \quad (4.82)$$

onde $\omega_s^2 = q^2 - \tilde{m}_s^2$. Assim:

$$\begin{aligned} [-\omega^2 + \omega_s^2] \delta \phi = g_s M^{*(0)} \sum_{j=p,n} & \\ \{ \delta \mathcal{V}_j^0 \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} [\frac{\omega}{q} \frac{p^3}{E^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_j^{(0)} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_j^{(0)}}{\omega - \vec{p} \cdot \vec{q}}] & \\ + M^{*(0)} g_s \delta \phi \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{1}{E^{(0)}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_j^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E^{(0)}}} \} & \end{aligned} \quad (4.83)$$

Como as integrais que aparecem acima envolvem a função delta, elas podem ser obtidas trivialmente a partir dos cálculos das integrais (H1-H3). Basta dividir estas integrais por E_{Fj} e obter:

$$\begin{aligned} [-\omega^2 + \omega_s^2] \delta \phi = g_s M^{*(0)} \sum_{j=p,n} & \\ \{ -\delta \mathcal{V}_j^0 \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) p_{Fj} L(S_j) + M^{*(0)} g_s \delta \phi \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fj}}{E_{Fj}} L(S_j), & \end{aligned} \quad (4.84)$$

ou seja:

$$[-\omega^2 + \omega_s^2] \delta \phi = g_s M^{*(0)} \sum_{j=p,n} \frac{\delta j_j^0}{E_{Fj}}. \quad (4.85)$$

Substituindo na equação (4.81), obtemos:

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 = & -\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) p_{Fi} E_{Fi} L(S_i) \delta \mathcal{V}_i^0 \\ & + \frac{1}{2\pi^2} p_{Fi} \frac{L(S_i) M^{*(0)2}}{-\omega^2 + \omega_s^2} g_s^2 \sum_{j=p,n} \frac{\delta j_j^0}{E_{Fj}}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Usando a equação (4.51), chegamos a:

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 = & \left\{ \sum_{j=p,n} \left[\frac{g_v^2}{-\omega^2 + \omega_\omega^2} + \frac{(\frac{g_\rho}{2})^2 \tau_i \tau_j}{-\omega^2 + \omega_\rho^2} \right] \delta j_j^0 + \frac{e \left(\frac{1+\tau_i}{2} \right)}{-\omega^2 + q^2} (\delta j_p^\mu - \delta j_e^\mu) \right\} \\ & \cdot \left[-\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) p_{Fi} E_{Fi} L(S_i) \right] \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi} L(S_i) m^{*(0)2} g_s^2}{-\omega^2 + \omega_s^2} \sum_{j=p,n} \frac{\delta j_j^0}{E_{Fj}}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

A equação acima é equivalente àquela da referência (BRITO et al., 2006), como pretendíamos demonstrar. Sua solução envolve a escolha de um ansatz apropriado para δf_i . Se escolhermos:

$$\delta f_i = \delta f_i(\vec{q}, \vec{p}, \omega) = \delta f_i(\vec{q}, \omega, \cos\theta) \delta(p_{Fi} - p), \quad (4.88)$$

então obtemos:

$$\begin{aligned} \delta j_i^0 = & \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \delta f_i(\vec{q}, \omega, \cos\theta) \delta(p_{Fi} - p) \\ = & \frac{p_{Fi}^2}{\pi^2} \int d\theta \sin\theta f_i(\vec{q}, \omega, \cos\theta) \end{aligned} \quad (4.89)$$

e podemos definir:

$$\delta j_i^0 = p_{Fi}^2 A_{\omega i}. \quad (4.90)$$

Substituindo na equação (4.87), temos:

$$\begin{aligned}
p_{Fi}^2 A_{\omega i} = & \left\{ \sum_{j=p,n} \left[\frac{g_v^2}{-\omega^2 + \omega_\omega^2} + \frac{(\frac{g_\rho}{2})^2 \tau_i \tau_j}{-\omega^2 + \omega_\rho^2} \right] p_{Fj}^2 A_{\omega j} \right. \\
& + \frac{e \left(\frac{1+\tau_i}{2} \right)}{-\omega^2 + q^2} (p_{Fp}^2 A_{\omega p} - p_{Fe}^2 A_{\omega e}) \} \\
& \cdot \left[-\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) p_{Fi} E_{Fi} L(S_i) \right] \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi} L(S_i) M^{*(0)2} g_s^2}{-\omega^2 + \omega_s^2} \sum_{j=p,n} \frac{p_{Fj}^2 A_{\omega j}}{E_{Fj}}.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
C_\omega^{ij} & \equiv \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fj}^2 E_{Fi}}{p_{Fi}} \\
& = \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fj}^2}{V_{Fi}},
\end{aligned} \tag{4.92}$$

onde $V_{Fi} = \frac{p_{Fi}}{E_{Fi}} = \frac{q p_{Fi}}{E_{Fi}} q = \frac{\omega_{0i}}{q}$,

$$C_\rho^{ij} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \frac{(\frac{g_\rho}{2})^2}{\omega^2 - \omega_\rho^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fj}^2}{V_{Fi}}, \tag{4.93}$$

$$C_e^{ij} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2}{\omega^2 - q^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fj}^2}{V_{Fi}} = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{e^2}{q^2} \frac{p_{Fj}^2}{V_{Fi}}, \tag{4.94}$$

$$C_s^{ij} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^{*(0)2} g_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2} \frac{p_{Fj} V_{Fj}}{E_{Fj}}, \tag{4.95}$$

reescrevemos a equação (4.91) como:

$$\begin{aligned}
A_{\omega i} = & \sum_{j=p,n} (C_\omega^{ij} + C_\rho^{ij} \tau_i \tau_j - C_s^{ij}) L(S_i) A_{\omega j} \\
& + \left[\frac{1+\tau_i}{2} C_e^{ip} A_{\omega p} - \frac{1+\tau_i}{2} C_e^{ie} A_{\omega e} \right] L(S_i).
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Esta solução é para $i = p, n$. No caso dos elétrons, o procedimento

é similar. Da equação (4.56):

$$\begin{aligned} \delta f_e &= \delta \mathcal{V}_e^\mu \left(\frac{\partial}{\partial p^k} f_e^{(0)} + \frac{\frac{p^k}{E_e^{(0)}} \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_e^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_e^{(0)}}} \right) \\ &\quad - \delta \mathcal{V}_e^0 \frac{\vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_e^{(0)}}{\omega - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_e^{(0)}}}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

onde:

$$\mathcal{V}_e^\mu = -e \delta A^\mu = \frac{-e^2}{-\omega^2 + q^2} [\delta j_p^\mu - \delta j_e^\mu]. \quad (4.98)$$

Para o nosso caso de perturbações tipo onda longitudinal, $\delta \mathcal{V}_e^2 = \delta \mathcal{V}_e^3 = 0$. Logo, escrevemos uma equação análoga à equação (4.72) para nucleons:

$$\begin{aligned} \delta j_e^0 &= \delta \mathcal{V}_e^0 \left[\omega \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{p \cos^2 \theta}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}_e}} \frac{\partial}{\partial p} f_e^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - q \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E^{(0)}} \frac{\cos \theta}{\omega - \frac{pq \cos \theta}{E^{(0)}_e}} \right] \frac{\partial}{\partial p} f_e^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

e da equação (4.81):

$$\delta j_e^0 = -\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) p_{Fe} E_{Fe} L(S_e) \delta \mathcal{V}_e^0, \quad (4.100)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} p_{Fe}^2 A_{\omega e} &= -\frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \left[\frac{-e^2}{-\omega^2 + q^2} (p_{Fp}^2 A_{\omega p} - p_{Fe}^2 A_{\omega e}) \right] \\ &\quad \cdot p_{Fe} E_{Fe} L(S_e), \end{aligned} \quad (4.101)$$

com:

$$A_{\omega e} = (-C_e^{ep} A_{\omega p} + C_e^{ee} A_{\omega e}) L(S_e). \quad (4.102)$$

Destas equações, obtemos a relação de dispersão para os elétrons. Vamos definir:

$$F^{ij} \equiv -C_{\omega}^{ij} - \tau_i \tau_j C_{\rho}^{ij} + C_s^{ij} - C_e^{ij} \left(\frac{1 + \tau_i}{2} \right) \left(\frac{1 + \tau_j}{2} \right), \quad (4.103)$$

e então:

$$A_{\omega p} = -F^{pp} L(S_p) A_{\omega p} - F^{pn} L(S_p) A_{\omega n} - C_e^{pe} A_{\omega e} L(S_p), \quad (4.104)$$

$$A_{\omega n} = -F^{np} L(S_n) A_{\omega p} - F^{nn} L(S_n) A_{\omega n}, \quad (4.105)$$

$$A_{\omega p} = -C_e^{ep} L(S_e) A_{\omega p} + C_e^{ee} L(S_e) A_{\omega e}. \quad (4.106)$$

5 DINÂMICA NUCLEAR COM CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE

Neste capítulo, pretendemos demonstrar que o método utilizado na referência (ZHUANG; HEINZ, 1996) para a eletrodinâmica quântica (EDQ) com spin é adequado para obtermos a equação de transporte para a matéria nuclear na presença de um campo magnético. O cerne do argumento está em que os espinores da EDQ, assim como os campos mesônicos que consideramos no modelo de Walecka não-linear, são campos vetoriais, e que as mesmas considerações que se aplicam aos primeiros justificam a validade do método para os últimos. Para esclarecer o método, exploramos os resultados de Zhuang e Heinz em detalhes, adicionando o potencial nuclear do nosso modelo. Então, a partir desses resultados e nos baseando no trabalho de Kelly sobre plasmas quânticos (KELLY, 1964), que nosso grupo de trabalho já vem investigando há algum tempo (SAFANELLI, 2010), buscamos obter as relações de dispersão para perturbações longitudinais e transversais do nosso sistema.

5.1 OBTENÇÃO DE EQUAÇÕES TIPO VLASOV ATRAVÉS DA FUNÇÃO DE WIGNER

Nesta seção voltamos a tratar da função de Wigner para obtermos uma descrição adequada para o nosso sistema completo. Utilizaremos a formulação de Wigner covariante e invariante por calibre em tempos iguais para obter a equação de transporte para a matéria nuclear (npe). Vamos definir a função de Wigner de maneira que ela seja invariante por calibre, e demonstrar essa propriedade da nossa definição. Nesta seção, seguimos paralelamente ao trabalho realizado em (VASAK et al., 1987), adicionando um termo de fase que é fundamental para obtermos a invariância desejada:

$$\hat{W}_4^{(j)}(x, p) = \int d^4y e^{-ip \cdot y} \Phi_4^{(j)}(x, y), \quad (5.1)$$

com

$$\Phi_{4\alpha\beta}^{(j)}(x, y) \equiv \hat{\Psi}_{j\beta}(x) e^{y \cdot \frac{D_j^\dagger}{2}} e^{-y \cdot \frac{D_j}{2}} \hat{\Psi}_{j\alpha}(x). \quad (5.2)$$

E podemos demonstrar que também, dada a definição acima,

$$\Phi_{4\alpha\beta}^{(j)}(x, y) = \hat{\Psi}_{j\beta}(x + \frac{1}{2}y) e^{-iy \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}_{(j)}(x+ys)} \hat{\Psi}_{j\alpha}(x + \frac{1}{2}y). \quad (5.3)$$

Nas equações acima, o índice j se refere às espécies (prótons, nêutrons e elétrons), e os índices $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ são índices espinoriais.

Vamos demonstrar porque o termo de fase é necessário para garantir a invariância de calibre da função de Wigner. É importante notar, também, que este termo, como escrito na equação 5.3, contém explicitamente uma integral de linha do ponto $x - \frac{y}{2}$ ao ponto $x + \frac{y}{2}$. A princípio a integral poderia ser feita por qualquer caminho, mas a invariância de calibre demanda que o caminho seja uma linha reta (ZHUANG; HEINZ, 1996), como iremos demonstrar também.

A Lagrangeana do nosso modelo, assim como as equações de movimento para os férmions e os campos dela obtidas, possuem invariância de calibre. Para considerarmos a função de Wigner, tal como desejamos, um análogo quântico da função de distribuição no espaço de fase, é importante que ela também tenha essa propriedade, e é possível fazê-lo adicionando um termo de fase, como aquele descrito acima. Detalharemos o problema a seguir. Suprimindo os índices de espécie, seja um operador de Wigner dado por:

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \hat{\Psi}_{\beta} e^{\frac{1}{2}y \cdot \partial^{\dagger}} e^{-\frac{1}{2}y \cdot \partial} \hat{\Psi}_{\alpha}. \quad (5.4)$$

A interpretação física, de um análogo a uma função de distribuição quântica, segue da definição do operador quadrimomento cinético:

$$\hat{p}^{\mu} = \frac{1}{2}i(\partial_{\mu} - \partial_{\mu}^{\dagger}), \quad (5.5)$$

com $\partial_{\mu}^{\dagger} = \partial_{\mu}^{\dagger}$ e $\hat{p}_{\mu} = i\partial_{\mu}$. Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) &= \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \hat{\Psi}_{\beta} e^{-i[p_{\mu} - \frac{1}{2}i(\partial_{\mu} - \partial_{\mu}^{\dagger})]y^{\mu}} \hat{\Psi}_{\alpha} \\ &= \hat{\Psi}_{\beta} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-i(p_{\mu} - \hat{p}_{\mu})y^{\mu}} \hat{\Psi}_{\alpha} \equiv \hat{\Psi}_{\beta} \delta^4(p - \hat{p}) \hat{\Psi}_{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Desta maneira, o traço do operador de Wigner, $\langle : \hat{\Psi}_{\beta} \delta^4(p - \hat{p}) \hat{\Psi}_{\alpha} : \rangle$, representa a densidade - escalar de Lorentz - das partículas fermiônicas no ponto x^{μ} do espaço-tempo que possuem momento cinético p^{μ} , que

é o que procuramos. É imediato que:

$$\begin{aligned} \langle j^\mu(x) \rangle &= \left\langle : \hat{\Psi}(x) \gamma^\mu \hat{\Psi}(x) : \right\rangle \\ &\equiv Tr \int d^4p \gamma^\mu = \left\langle : \hat{W}(x, p) : \right\rangle = Tr \int d^4p \gamma^\mu W(x, p). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Temos ainda um problema: a função de Wigner definida aqui viola a invariância por transformação de calibre local. Vejamos, a partir da equação (5.6),

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) &= \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \hat{\Psi}_\beta(x) e^{-i[p_\mu - \frac{1}{2}i(\partial_\mu - \partial_\mu^\dagger)]y^\mu} \hat{\Psi}_\alpha = \\ &= \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \hat{\Psi}_\beta(x + \frac{y}{2}) \hat{\Psi}_\alpha(x - \frac{y}{2}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

pois

$$e^{a \cdot \partial_x} f(x) = f(x + a), \quad (5.9)$$

com $a^\mu \cdot \partial_{\mu x} = a_0 \partial_0 + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_x$. Por uma transformação de calibre determinada pela função escalar Λ ,

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) &\rightarrow \hat{W}'_{\alpha\beta}(x, p) = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \\ &\times \hat{\Psi}_\beta(x + \frac{y}{2}) e^{-i\Lambda(x + \frac{y}{2})} e^{i\Lambda(x - \frac{y}{2})} \hat{\Psi}_\alpha(x - \frac{y}{2}) \\ &= \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{[p \cdot y + \Lambda(x + \frac{y}{2}) - \Lambda(x - \frac{y}{2})]} \hat{\Psi}_\beta(x + \frac{y}{2}) \hat{\Psi}_\alpha(x - \frac{y}{2}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Se tomarmos o traço da maneira usual na formulação de Wigner, veremos que os observáveis dependerão da escolha do calibre. Para remover esta dependência, vamos incluir o fator de fase:

$$U(\mathcal{V}; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}) = e^{if(\mathcal{V}; x, y)} \quad (5.11)$$

e, portanto, redefinir o operador de Wigner:

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) \equiv \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \hat{\Psi}_\beta U(\mathcal{V}; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}) \hat{\Psi}_\alpha, \quad (5.12)$$

por uma transformação de calibre, ou seja,

$$\Psi \Rightarrow \Psi' = \Psi e^{i\Lambda}, \quad \mathcal{V}^\mu \Rightarrow \mathcal{V}'^\mu = \mathcal{V}^\mu - \partial^\mu \Lambda, \quad (5.13)$$

temos:

$$\begin{aligned} \hat{W}'_{\alpha\beta}(x, p) &= \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-i[p \cdot y + \Lambda(x + \frac{y}{2}) - \Lambda(x - \frac{y}{2})]} \\ &\times U(\mathcal{V}^\mu - \partial^\mu \Lambda; \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}) \hat{\Psi}_\beta(x + \frac{y}{2}) \hat{\Psi}_\alpha(x - \frac{y}{2}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Para termos a invariância, naturalmente, basta que $\hat{W}'_{\alpha\beta}(x, p) = \hat{W}_{\alpha\beta}(x, p)$. Das equações (5.12) e (5.14), obtemos que esta exigência se resume à seguinte igualdade:

$$U(\mathcal{V}^\mu - \partial^\mu \Lambda; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}) e^{-i\Lambda(x + \frac{y}{2})} e^{i\Lambda(x - \frac{y}{2})} = U(\mathcal{V}^\mu; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}). \quad (5.15)$$

Usando a equação (5.11), escrevemos o requisito como:

$$e^{if(\mathcal{V}^\mu - \partial^\mu \Lambda; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2})} e^{-i\Lambda(x + \frac{y}{2})} e^{i\Lambda(x - \frac{y}{2})} = e^{if(\mathcal{V}^\mu; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2})} \quad (5.16)$$

e, portanto,

$$f(\mathcal{V}^\mu - \partial^\mu \Lambda; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}) = f(\mathcal{V}^\mu; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}) + \Lambda(x + \frac{y}{2}) - \Lambda(x - \frac{y}{2}), \quad (5.17)$$

assim como $f(\mathcal{V}^\mu; x = 0, y = 0) = 0$. Apresentaremos um *ansatz* a seguir e mostraremos que ele satisfaz essas condições:

$$f(\mathcal{V}^\mu; x, y) = -y^\mu \int_0^1 ds \mathcal{V}_\mu(x - \frac{y}{2} + sy), \quad (5.18)$$

onde a integral é uma integral de linha sobre o campo clássico \mathcal{V}_μ ao longo de uma linha reta entre os pontos $x - \frac{y}{2}$ e $x + \frac{y}{2}$. A satisfação da condição para $x = y = 0$ é trivial. No caso geral, temos:

$$\begin{aligned}
f(\mathcal{V}^\mu - \partial^\mu \Lambda; x, y) &= -y^\mu \int_0^1 ds \left[\mathcal{V}_\mu(x - \frac{y}{2} + sy) - \partial_\mu \Lambda(x - \frac{y}{2} + sy) \right] \\
&= -y^\mu \int_0^1 ds \mathcal{V}_\mu(x - \frac{y}{2} + sy) \\
&\quad + y^\mu \int_0^1 ds \partial_\mu \Lambda(x - \frac{y}{2} + sy) \\
&= f(\mathcal{V}^\mu; x, y) + y^\mu \int_0^1 ds \partial_\mu \Lambda(x - \frac{y}{2} + sy).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Mas $\partial_\mu \Lambda(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Lambda(x)$. Definindo $z = x - \frac{y}{2} + sy$, temos que:

$$y^\mu \partial_\mu \Lambda(x - \frac{y}{2} + sy) = y^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} \Lambda(z)|_{z=x-\frac{y}{2}+sy}, \tag{5.20}$$

e dado que

$$\frac{d}{ds} \Lambda(x - \frac{y}{2} + sy) = \frac{d}{ds} \Lambda[z(s)] = \frac{\partial \Lambda}{\partial z^\mu} \frac{\partial z^\mu}{\partial s} = y^\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial z^\mu}, \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
y^\mu \int_0^1 ds \partial_\mu \Lambda(x - \frac{y}{2} + sy) &= \int_0^1 ds \frac{d}{ds} \Lambda[z(s)] \\
&= \Lambda[z(1)] - \Lambda[z(0)] = \Lambda[x + \frac{y}{2}] - \Lambda[x - \frac{y}{2}].
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Substituindo na equação (5.19), obtemos:

$$f(\mathcal{V}^\mu - \partial^\mu \Lambda; x, y) = f(\mathcal{V}^\mu; x, y) + \Lambda(x + \frac{y}{2}) - \Lambda(x - \frac{y}{2}), \tag{5.23}$$

como queríamos demonstrar. Voltando à equação (5.11), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{V}; x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}) &= e^{-i \int_0^1 ds \mathcal{V}(x - \frac{y}{2} + sy) \cdot y} \\
&= e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x + sy) \cdot y}.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Agora vamos escrever o operador de Wigner em termos das derivadas covariantes:

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) = \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \hat{\Psi}_{\beta}(x + \frac{y}{2}) e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \hat{\Psi}_{\alpha}(x - \frac{y}{2}). \quad (5.25)$$

Para completar a demonstração, vamos apresentar uma propriedade do operador de translação covariante D_x , como definido abaixo. A demonstração pode ser encontrada em (ELZE; GYULASSY; VASAK, 1986):

$$e^{-yD_x} \Psi(x) = U(\mathcal{V}; x, x - y) \Psi(x - y), \quad (5.26)$$

onde

$$U(\mathcal{V}; x, x - y) = e^{-i \int_0^1 ds \mathcal{V}[x - (x-y)s] \cdot y}. \quad (5.27)$$

Expandindo a exponencial, temos que:

$$\begin{aligned} e^{-yD_x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{y}{n} \cdot D_x \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{y}{n} \cdot D_x \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{y}{n} \cdot (\partial_x + i\mathcal{V}) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) \left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) \left(1 + O\left(\left(\frac{y}{n}\right)^2\right) \right) \right]^n, \end{aligned} \quad (5.28)$$

pois

$$\begin{aligned} \left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) e^{-\frac{y}{n} \cdot \partial_x} &= \left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) \left(1 - \frac{y}{n} \cdot \partial_x + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{y}{n} \cdot (\partial_x + i\mathcal{V}) + O\left(\left(\frac{y}{n}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) \left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) \right]^n = \left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) e^{-\frac{y}{n} \cdot \partial_x} \\ &\quad \times \left(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V} \right) e^{-\frac{y}{n} \cdot \partial_x} \times \dots \end{aligned} \quad (5.30)$$

Mas

$$e^{-ia \cdot \partial_x} f(x) g(x) = f(x - a) e^{-ia \cdot \partial_x} g(x), \quad (5.31)$$

desde que a seja infinitesimal e tomemos o limite da expansão da exponencial. Assim:

$$\begin{aligned} I &= (1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}(x)) (1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}(x - \frac{y}{n})) (1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}(x - \frac{2y}{n})) \\ &\times \dots \times (1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}[x - (\frac{(n-1)y}{n})]) e^{-n \cdot \frac{y}{n} \cdot \partial_x} \\ &= [(1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}) e^{-n \cdot \frac{y}{n} \cdot \partial_x}]^n = (1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}(x)) (1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}(x - \frac{y}{n})) \\ &\times \dots \times (1 - i \frac{y}{n} \cdot \mathcal{V}(x - y + \frac{y}{n})) e^{-y \cdot \partial_x} \\ &= e^{-i \int_{x-y}^x ds \mathcal{V}(s) \cdot y}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Usando a propriedade aqui demonstrada, podemos escrever:

$$e^{-\frac{y}{2} \cdot D_x} \Psi_\alpha(x) = U(\mathcal{V}; x, x - y) \Psi_\alpha(x - y), \quad (5.33)$$

e substituindo na equação (5.25), temos:

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) = \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \hat{\Psi}_\beta(x) e^{\frac{y}{2} \cdot D_x^\dagger} e^{-\frac{y}{2} \cdot D_x} \hat{\Psi}_\alpha(x), \quad (5.34)$$

onde usamos que

$$[e^{\frac{y}{2} \cdot D_x} \hat{\Psi}_\beta(x)]^\dagger = \hat{\Psi}_\beta(x) e^{\frac{y}{2} \cdot D_x^\dagger} = \hat{\Psi}_\beta(x + \frac{y}{2}) U(\mathcal{V}; x + \frac{y}{2}, x), \quad (5.35)$$

e também

$$U(\mathcal{V}; a, b) U(\mathcal{V}; b, c) = U(\mathcal{V}; a, c), \quad (5.36)$$

o que significa restringir o caminho da integral a uma linha reta.

5.2 EQUAÇÕES CINÉTICAS PARA A FUNÇÃO DE WIGNER

Nesta seção, vamos obter equações de evolução para a função de Wigner no tempo, utilizando a definição da seção anterior para a

função, com o fator de fase que garante a invariância por mudança de calibre. Primeiramente, vamos obter as derivadas de $\Phi_{4\alpha\beta}(x, y)$ em relação às coordenadas x e y . Com as definições da seção anterior, temos para a derivada na coordenada x :

$$\begin{aligned}
 \partial_{x\mu}\Phi_{4\alpha\beta}(x, y) &= \partial_{x\mu} \left[\hat{\hat{\Psi}}_{\beta}(x + \frac{y}{2}) e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \hat{\Psi}_{\alpha}(x - \frac{y}{2}) \right] \\
 &= \left[\partial_{x\mu} \hat{\hat{\Psi}}_{\beta}(x + \frac{y}{2}) \right] e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \hat{\Psi}_{\alpha}(x - \frac{y}{2}) \\
 &\quad + \hat{\hat{\Psi}}_{\beta}(x + \frac{y}{2}) \left[e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \right] \hat{\Psi}_{\alpha}(x - \frac{y}{2}) \\
 &\quad + \hat{\hat{\Psi}}_{\beta}(x + \frac{y}{2}) e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \left[\partial_{x\mu} \hat{\Psi}_{\alpha}(x - \frac{y}{2}) \right].
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Para o cálculo desta expressão, vamos primeiro analisar a derivada do fator de fase:

$$\begin{aligned}
 \partial_{x\mu} e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} &= e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \partial_{x\mu} e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \\
 &= \left[-iy^{\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \partial_{x\mu} \mathcal{V}_{\nu}(x + sy) \cdot y \right] \\
 &\quad \times e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y}.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Definindo:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_{x\mu} \mathcal{V}_{\nu} - \partial_{x\nu} \mathcal{V}_{\mu}, \tag{5.39}$$

então

$$\begin{aligned}
y^\nu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \partial_{x\mu} \mathcal{V}_\nu(x+sy) &= y^\nu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds [\partial_{x\nu} \mathcal{V}_\mu(x+sy) + \tilde{F}_{\mu\nu}(x+ys)] \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \frac{d}{ds} \mathcal{V}_\mu(x+sy) \\
&\quad + y^\nu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}_{\mu\nu}(x+ys) \\
&= \mathcal{V}_\mu(x + \frac{y}{2}) - \mathcal{V}_\mu(x - \frac{y}{2}) \\
&\quad + y^\nu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}_{\mu\nu}(x+ys).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Definindo agora $x_\pm = x \pm \frac{1}{2}y$,

$$\begin{aligned}
\partial_{x\mu} e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} &= -i [\mathcal{V}_\mu(x_+) - \mathcal{V}_\mu(x_-) \\
&\quad + y^\nu \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}_{\mu\nu}(x+ys)] \\
&\quad \times e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

De modo completamente análogo, podemos calcular a derivada na coordenada y :

$$\begin{aligned}
\partial_{y\mu} e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} &= e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} \\
&\quad \times \partial_{y\mu} (-i) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y
\end{aligned} \tag{5.42}$$

E então:

$$\begin{aligned}
& \partial_{y\mu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds [\partial_{y\mu} \mathcal{V}(x+sy)] \cdot y \\
& + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}_\nu(x+ys) \delta_{\nu\mu} \\
& = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds [\partial_{z\mu'} \mathcal{V}_\nu(z)] \frac{\partial z_{\mu'}}{\partial y_\mu} y^\nu + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}_\nu(x+ys) \\
& = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy^\nu [\partial_{x\mu} \mathcal{V}_\nu(x+ys)] + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}_\nu(x+ys) \\
& = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy^\nu [\partial_{x\nu} \mathcal{V}_\mu(x+ys) + \tilde{F}_{\mu\nu}] + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}_\nu(x+ys) \\
& = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s \frac{d}{ds} \mathcal{V}_\mu(x+ys) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}_\nu(x+ys) \\
& = s \mathcal{V}_\nu(x+ys) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy^\nu \tilde{F}_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

com $z = x + ys$. Assim:

$$\begin{aligned}
\partial_{y\mu} e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y} &= -i \left[\frac{1}{2} \mathcal{V}_\mu(x_+) - \mathcal{V}_\mu(x_-) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} \right] \\
&\times e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y}.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Para simplificar a notação daqui em diante, vamos definir:

$$\hat{G} \equiv e^{-i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}(x+sy) \cdot y}. \tag{5.45}$$

Assim, podemos escrever as derivadas de $\Phi_{4\alpha\beta}(x, y)$ como:

$$\begin{aligned}\partial_{x\mu}\Phi_{4\alpha\beta}(x,y) &= [\partial_{x+\mu}\hat{\Psi}_{\beta}(x_+)]\hat{G}\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) + \hat{\Psi}_{\beta}(x_+)\hat{G}\partial_{x-\mu}\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) \\ &\quad + \hat{\Psi}_{\beta}(x_+)(\partial_{x\mu}\hat{G})\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-),\end{aligned}\tag{5.46}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_{y\mu}\Phi_{4\alpha\beta}(x,y) &= \frac{1}{2}[\partial_{x+\mu}\hat{\Psi}_{\beta}(x_+)]\hat{G}\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) - \hat{\Psi}_{\beta}(x_+)\hat{G}\frac{1}{2}\partial_{x-\mu}\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) \\ &\quad + \hat{\Psi}_{\beta}(x_+)(\partial_{y\mu}\hat{G})\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-),\end{aligned}\tag{5.47}$$

onde usamos que $\partial_{y\mu}f(x_+) = \frac{1}{2}\partial_{x+\mu}f(x_+)$ e $\partial_{y\mu}f(x_-) = -\frac{1}{2}\partial_{x-\mu}f(x_-)$. Agora vamos calcular:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_{x\mu}\Phi_{4\alpha\beta}(x,y) - \partial_{y\mu}\Phi_{4\alpha\beta}(x,y) &= \hat{\Psi}_{\beta}(x_+)\hat{G}\partial_{x-\mu}\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) \\ &\quad + \hat{\Psi}_{\beta}(x_+)\left[\left(\frac{1}{2}\partial_{x\mu} - \partial_{y\mu}\right)\hat{G}\right]\hat{\Psi}_{\alpha}(x_-).\end{aligned}\tag{5.48}$$

Vamos usar as equações de movimento dos férmions:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{x\mu}\hat{\Psi}(x \pm \frac{1}{2}y) = \left[\gamma^{\mu}\mathcal{V}_{\mu}(x \pm \frac{1}{2}y) + M^*(x \pm \frac{1}{2}y)\right]\hat{\Psi}(x \pm \frac{1}{2}y),\tag{5.49}$$

$$\left[i\partial_{x\mu}\hat{\Psi}(x \pm \frac{1}{2}y)\right]\gamma^{\mu} = -\hat{\Psi}(x \pm \frac{1}{2}y)\left[\gamma^{\mu}\mathcal{V}_{\mu}(x \pm \frac{1}{2}y) + M^*(x \pm \frac{1}{2}y)\right].\tag{5.50}$$

Usando estas equações de movimento e as derivadas do operador \hat{G} , vamos reescrever a equação (5.48) e multiplicá-la por γ^{μ} :

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \left(\frac{1}{2} \partial_{x\mu} - \partial_{y\mu} \right) \Phi_{4\alpha\beta}(x, y) = \hat{\Psi}_{\beta}(x_+) \hat{G} \gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \partial_{x-\mu} \hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) \\
& = \hat{\Psi}_{\beta}(x_+) \hat{G} \frac{1}{i} \left[\gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \mathcal{V}_{\mu}(x_-) \hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) + M^*(x_-) \Psi_{\lambda}(x_-) \right] \\
& + \hat{\Psi}_{\beta}(x_+) \left[\gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \left(\frac{1}{2} \partial_{x\mu} - \partial_{y\mu} \right) \hat{G} \right] \hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) \\
& + \hat{\Psi}_{\beta}(x_+) \gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \frac{-i}{2} \left[\mathcal{V}_{\mu}(x_+) - \mathcal{V}_{\mu}(x_-) + y^{\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}_{\mu\nu} \right] \hat{G} \hat{\Psi}_{\alpha}(x_-) \\
& - \hat{\Psi}_{\beta}(x_+) \gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} (-i) \left[\frac{1}{2} \mathcal{V}_{\mu}(x_+) + \frac{1}{2} \mathcal{V}_{\mu}(x_-) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy^{\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right] \hat{G} \hat{\Psi}_{\alpha}(x_-).
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Com alguns cálculos, simplificamos a equação para:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} \partial_{x\mu} - \partial_{y\mu} \right) \gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \Phi_{4\alpha\beta} = -i M^*(x_-) \Phi_{4\alpha\beta} \\
& - \frac{i}{2} \gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} y^{\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}_{\mu\nu}(x + sy) \Phi_{4\alpha\beta} \\
& + i \gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} y^{\nu} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s \tilde{F}_{\mu\nu}(x + sy) \Phi_{4\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Definindo:

$$\tilde{D}^{\mu}(x, y) \equiv \partial_x^{\mu} + i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds y_{\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}(x + sy), \tag{5.53}$$

$$\tilde{\Pi}^{\mu}(x, y) \equiv i \left(\partial_y^{\mu} + i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy_{\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}(x + sy) \right), \tag{5.54}$$

podemos reescrever a equação (5.52) como:

$$\left(\frac{1}{2} \tilde{D}^{\mu}(x, y) + i \tilde{\Pi}^{\mu}(x, y) \right) \gamma^{\mu} \Phi_4 = -i M^*(x_-) \Phi_4. \tag{5.55}$$

Esta é uma equação de movimento para o operador de Wigner. Para nossos propósitos nas próximas seções, no entanto, procuramos

escrevê-la de forma diferente. Para isto, tomaremos a transformada de Fourier da expressão para a função de Wigner:

$$W_4(x, p) = \int d^4y e^{-ip \cdot y} \Phi_4(x, y) \quad (5.56)$$

$$\int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y'} W_4(x, p) = \int d^4y \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (y - y')} \Phi_4(x, y), \quad (5.57)$$

onde vemos uma função delta formal do lado direito, ou seja, temos:

$$\Phi_4(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} W_4(x, p). \quad (5.58)$$

Substituindo na equação (5.55):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \left(\partial_{x\mu} + i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds y_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}(x + sy) \right) \right. \\ & \left. - \left(\partial_{y\mu} + i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds sy_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}(x + sy) \right) \right] \gamma^\mu \\ & \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} W_4(x, p) \\ & = -iM^*(x - \frac{y}{2}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} W_4(x, p). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Integrando por partes e supondo que $W_4(x, p)$ se anule na fronteira:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} y^\nu e^{-ip \cdot y} W_4(x, p) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} (\partial_{p\nu} e^{-ip \cdot y}) W_4(x, p) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} \left(\frac{1}{i} \partial_{p\nu} \right) W_4(x, p). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Portanto para qualquer função $f(y)$ que admita expansão em série de Taylor,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(y) e^{-ip \cdot y} \hat{W}_4(x, p) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot y} f(y \Rightarrow i\partial_p^\nu) W_4(x, p). \quad (5.61)$$

Particularmente, substituindo $y^\nu \rightarrow i\hbar\partial_p^\nu$ e $\partial_y^\mu \rightarrow ip^\mu$ na equação (5.55):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \left(\partial_{x\mu} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}^{\mu\nu}(x + i\hbar s \partial_p) \partial_p^\mu \right) \right. \\ & \left. - \left(ip_\mu + i\hbar \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s \tilde{F}^{\mu\nu}(x + i\hbar s \partial_p) \right) \right] \gamma^\mu W_4(x, p) \\ & = -iM^*(x - i\hbar s \partial_p) W_4(x, p). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Podemos agora definir os operadores que agem no espaço de fase:

$$D^\mu \equiv \partial_{x\mu} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}^{\mu\nu}(x + i\hbar s \partial_p) \partial_p^\nu, \quad (5.63)$$

$$\Pi^\mu \equiv p_\mu + i\hbar \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s \tilde{F}^{\mu\nu}(x + i\hbar s \partial_p) \partial_p^\nu, \quad (5.64)$$

e a equação (5.62) pode ser escrita como:

$$\left[\gamma^\mu \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) - M^*(x - i\hbar s \partial_p) \right] W_4(x, p) = 0. \quad (5.65)$$

Note que, tendo restaurado o \hbar , podemos considerar aproximações em ordens sucessivas para a equação acima. A seguir, vamos analisar esta equação e realizar a média na energia, integrando na variável p_0 . A função de Wigner é dada por uma matriz 4x4 no espaço de espinores de Dirac, portanto vamos considerar a sua decomposição espinorial e, através do cálculo dos traços da equação (5.65) obteremos os vínculos entre as componentes espinoriais.

Sem perda de generalidade, podemos decompor a função de Wigner nas bases da álgebra de Clifford. Esse procedimento é realizado no livro (GREINER; MARUHN, 1996). Da forma mais geral, essa decomposição é como segue:

$$\begin{aligned}
W_4(x, p) = \frac{1}{4} \left[F(x, p)\mathbb{I} + i\gamma^5 P(x, p) + \gamma^\mu F_\mu(x, p) \right. \\
\left. + \gamma^\mu \gamma^5 \Omega_\mu(x, p) + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} S_{\mu\nu}(x, p) \right].
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Substituindo esta expansão na equação (5.65), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left[\gamma^\lambda \left(\Pi_\lambda + \frac{i\hbar}{2} D_\lambda \right) - M^* \left(x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p \right) \right] \\
& \times \frac{1}{4} \left[F(x, p)\mathbb{I} + i\gamma^5 P(x, p) + \gamma^\mu F_\mu(x, p) \right. \\
& \left. + \gamma^\mu \gamma^5 \Omega_\mu(x, p) + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} S_{\mu\nu}(x, p) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{5.67}$$

onde $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$ é um tensor antissimétrico e, portanto, $S_{\mu\nu}$ também deve ser antissimétrico. Vamos calcular agora os traços desta equação, com o objetivo de obter as relações entre os coeficientes da decomposição. Para simplificar a notação, vamos omitir a dependência em (x,p) e definir o operador:

$$O_\lambda \equiv \Pi_\lambda + \frac{i\hbar}{2} D_\lambda. \tag{5.68}$$

Desta maneira, a equação (5.67) fica:

$$\left[O_\lambda \gamma^\lambda - M^* \right] \left(F\mathbb{I} + i\gamma^5 P + \gamma^\mu F_\mu + \gamma^\mu \gamma^5 \Omega_\mu + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \right) = 0. \tag{5.69}$$

Agora vamos calcular os traços da equação (5.69) multiplicada por alguns operadores. Vamos calcular primeiro $Tr[\mathbb{I} \times (5.69)]$:

$$\begin{aligned}
& O_\lambda (F \operatorname{Tr}[\gamma^\lambda] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^\mu] \\
& + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\lambda \gamma^5 \gamma^\mu] + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu}]) \\
& - M^* (F \operatorname{Tr}[\mathbb{I}] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\mu] + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu] \\
& + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\sigma^{\mu\nu}]) \\
& = O_\lambda F_\mu 4g^{\lambda\mu} - 4M^* F = 0 \Rightarrow \\
& \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) F^\mu(x, p) - M^* (x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) F(x, p) = 0.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Agora, vamos calcular $\operatorname{Tr}[\gamma^5 \times (5.69)]$:

$$\begin{aligned}
& O_\lambda (F \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^\lambda] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\mu] \\
& + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^5 \gamma^\mu] + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu}]) \\
& - M^* (F \operatorname{Tr}[\gamma^5] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^\mu] \\
& + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu] + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\gamma^5 \sigma^{\mu\nu}]) \\
& = 4O_\lambda g^{\lambda\mu} \Omega_\mu - 4M^* iP = 0 \Rightarrow \\
& \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) \Omega_\mu(x, p) - iM^* (x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) P(x, p) = 0.
\end{aligned} \tag{5.71}$$

E então $\operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \times (5.69)]$:

$$\begin{aligned}
& O_\lambda (F \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\mu] \\
& + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^5 \gamma^\mu] + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu}]) \\
& - M^* (F \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\mu] + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu] \\
& + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \sigma^{\mu\nu}]) \\
& = 4O_\lambda (F g^{\alpha\lambda} + iS^{\lambda\alpha}) - 4M^* F_\mu g^{\alpha\mu} = 0 \Rightarrow \\
& \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) F(x, p) + i \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) S^{\lambda\alpha}(x, p) \\
& - M^* (x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) F^\alpha(x, p) = 0.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

E também $\operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \times (5.69)]$:

$$\begin{aligned}
& O_\lambda (F \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\lambda] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\mu] \\
& + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^5 \gamma^\mu] + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu}]) \\
& - M^* (F \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5] + iP \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu] \\
& + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu] + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^5 \sigma^{\mu\nu}]) \\
& = -4O_\lambda \left(iP g^{\alpha\lambda} + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} \right) + 4M^* \Omega_\mu g^{\alpha\mu} = 0 \Rightarrow \\
& \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) iP(x, p) + \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} \\
& - M^* (x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) \Omega^\alpha(x, p) = 0.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

E finalmente $\operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \times (5.69)]$:

$$\begin{aligned}
& O_\lambda (F \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^\lambda] + iP \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^\lambda \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^\lambda \gamma^\mu] \\
& + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^\lambda \gamma^5 \gamma^\mu] + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^\lambda \sigma^{\mu\nu}]) \\
& - M^* (F \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta}] + iP \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^5] + F_\mu \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^\mu] + \Omega_\mu \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \gamma^5 \gamma^\mu] \\
& + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \operatorname{Tr}[\sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}]) \\
& = 4O_\lambda [iF_\mu (g^{\lambda\beta} g^{\mu\alpha} - g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}) + \Omega_\mu \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}] \\
& - 2M^* (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) = 0 \Rightarrow \\
& \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) iF_\mu (g^{\lambda\beta} g^{\mu\alpha} - g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}) + \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) \Omega_\mu \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \\
& + \frac{1}{2} M^* (-S^{\alpha\beta} + S^{\beta\alpha}) = 0 \Rightarrow \\
& \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) i (g^{\lambda\beta} F^\alpha - g^{\lambda\alpha} F^\beta) \\
& + \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) \Omega_\mu \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} - M^* S^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \\
& \left(\Pi_\beta + \frac{i\hbar}{2} D_\beta \right) F^\alpha(x, p) - i \left(\Pi_\alpha + \frac{i\hbar}{2} D_\alpha \right) F^\beta(x, p) \\
& + \left(\Pi_\mu + \frac{i\hbar}{2} D_\mu \right) \Omega_\mu(x, p) \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} - M^* (x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) S^{\alpha\beta}(x, p) = 0.
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Vamos escrever as partes imaginárias e reais das cinco equações acima:

$$\Pi_\mu F^\mu = M_R^* F, \tag{5.75}$$

$$\hbar D_\mu F^\mu = 2\hbar M_I^* F, \tag{5.76}$$

$$\Pi_\mu \Omega^\mu = -\hbar M_I^* P, \tag{5.77}$$

$$\hbar D_\mu \Omega^\mu = 2M_R^* P, \tag{5.78}$$

$$\Pi_\alpha F - \frac{\hbar}{2} D_\lambda S^{\lambda\alpha} = M_R^* F^\alpha, \tag{5.79}$$

$$\frac{\hbar}{2} D^\alpha = \Pi_\lambda S^{\alpha\lambda} + \hbar M_I^* F^\alpha, \quad (5.80)$$

$$-\hbar D^\alpha P + \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} \Pi_\lambda S_{\mu\nu} = 2M_R^* \Omega^\alpha, \quad (5.81)$$

$$\Pi^\alpha P = -\frac{1}{4} \hbar \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} D_\lambda S_{\mu\nu} + \hbar M_I^* \Omega^\alpha, \quad (5.82)$$

$$\frac{\hbar}{2} (D^\alpha F^\beta - D^\beta F^\alpha) + \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \Pi_\lambda \Omega_\mu = M_R^* S^{\alpha\beta}, \quad (5.83)$$

$$\Pi^\alpha F^\beta - \Pi^\beta F^\alpha = \frac{\hbar}{2} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} D_\lambda \Omega_\mu - \hbar M_I^* S^{\alpha\beta}, \quad (5.84)$$

onde usamos uma decomposição que será discutida mais adiante, dada por:

$$M^*(x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) = M_R^* + i\hbar M_I^*. \quad (5.85)$$

5.3 MÉDIAS NA ENERGIA

Agora vamos integrar a função de Wigner na variável p_0 , ou seja, realizar uma média na energia, com o intuito de recuperar a equação de Vlasov para o caso clássico, quando $\hbar \rightarrow 0$. Temos a função de Wigner:

$$W_4(x, p) = W_4(x, p_0, \vec{p}) = \int d^4y e^{-ip \cdot y} \Phi_4(x, y). \quad (5.86)$$

Vamos definir:

$$W_3(x, \vec{p}) = \int dp_0 W_4(x, p) \gamma^0. \quad (5.87)$$

A partir da equação (5.66), podemos calcular a média na energia de $W_4(x, p)$:

$$\begin{aligned}
W_3(x, \vec{p}) = & \int dp_0 W_4(x, p) \gamma^0 = \frac{1}{4} \left[\gamma^0 \int dp_0 F(x, p) + \right. \\
& + i \gamma^5 \gamma^0 \int dp_0 P(x, p) + (\gamma^0)^2 \int dp_0 F_0(x, p) \\
& - \vec{\gamma} \gamma^0 \int dp_0 \vec{F}(x, p) \\
& + \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \int dp_0 \Omega_0(x, p) - \vec{\gamma} \gamma^5 \gamma^0 \int dp_0 \vec{\Omega}(x, p) \\
& + i \gamma^0 \gamma^k \gamma^0 \int dp_0 S_{0k}(x, p) \\
& \left. + \sum_k \gamma^5 \gamma^0 \gamma^k \gamma^0 \int dp_0 \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S_{ij}(x, p) \right]. \tag{5.88}
\end{aligned}$$

Definindo:

$$f_0(x, \vec{p}) = \int dp_0 F_0(x, p) = \int dp_0 \text{Tr}[\gamma^0 W_4], \tag{5.89}$$

$$f_1(x, \vec{p}) = - \int dp_0 \Omega_0(x, p) = - \int dp_0 \text{Tr}[\gamma^0 \gamma^5 W_4], \tag{5.90}$$

$$f_2(x, \vec{p}) = \int dp_0 P(x, p) = \int dp_0 \text{Tr}[-i \gamma^5 W_4], \tag{5.91}$$

$$f_3(x, \vec{p}) = \int dp_0 F(x, p) = \int dp_0 \text{Tr}[W_4], \tag{5.92}$$

$$\vec{g}_0(x, \vec{p}) = - \int dp_0 \vec{\Omega}(x, p) = \int dp_0 \text{Tr}[\vec{\gamma} \gamma^5 W_4], \tag{5.93}$$

$$\vec{g}_1(x, \vec{p}) = \int dp_0 \vec{F}(x, p) = \int dp_0 \text{Tr}[\vec{\gamma} W_4], \tag{5.94}$$

$$g_{2i}(x, \vec{p}) = - \int dp_0 S^{0i}(x, p) = \int dp_0 S_{0i}(x, p) = \int dp_0 \text{Tr}[\sigma^{0i} W_4], \tag{5.95}$$

$$g_{3k}(x, \vec{p}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int dp_0 S_{ij}(x, p) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int dp_0 \text{Tr}[\sigma^{ij} W_4]. \quad (5.96)$$

Substituindo na equação (5.88):

$$\begin{aligned} W_3(x, \vec{p}) = & \frac{1}{4} [f_0(x, \vec{p}) + \gamma^5 f_1(x, \vec{p}) + i\gamma^5 \gamma^0 f_2(x, \vec{p}) + \gamma^0 f_3(x, \vec{p}) \\ & + \gamma^5 \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{g}_0(x, \vec{p}) + \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{g}_1(x, \vec{p}) \\ & - i\vec{\gamma} \cdot \vec{g}_2(x, \vec{p}) \gamma^5 \vec{\gamma} \cdot \vec{g}_3(x, \vec{p})]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Para obter as equações de movimento para $W_3(x, \vec{p})$, vamos integrar as equações (5.75) a (5.84) na coordenada p_0 e separar as partes reais e imaginárias dessas equações.

Integrando a equação (5.76) e utilizando (5.89) e (5.94), obtemos:

$$\hbar (D_t f_0 + \vec{D} \cdot \vec{g}_1) = 2\hbar \int dp_0 M_I^* F. \quad (5.98)$$

Integrando a equação (5.80) com $\alpha = 0$ e utilizando (5.92) e (5.95):

$$\hbar D_t f_3 - \vec{\Pi} \cdot \vec{g}_2 = \hbar \int dp_0 M_I^* \vec{F}. \quad (5.99)$$

Multiplicando a equação (5.84) por $\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta}$:

$$\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} (\Pi^\alpha F^\beta - \Pi^\beta F^\alpha) = \frac{\hbar}{2} \epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} D_\lambda \Omega_\mu - \hbar M_I^* \epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} S^{\alpha\beta}. \quad (5.100)$$

Como:

$$\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} = -2 (\delta_{\sigma\lambda} \delta_{\tau\mu} - \delta_{\sigma\mu} \delta_{\tau\lambda}), \quad (5.101)$$

$$\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} (\Pi^\alpha F^\beta - \Pi^\beta F^\alpha) = -\hbar (D_\sigma \Omega_\tau - D_\tau \Omega_\sigma) - \hbar M_I^* \epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} S^{\alpha\beta}. \quad (5.102)$$

Tomando $\sigma = 0$ e $\tau = i$:

$$\epsilon_{0i\alpha\beta} (\Pi^\alpha F^\beta - \Pi^\beta F^\alpha) = -\hbar \left(-D_t \vec{\Omega}_i - \vec{D}_i \Omega_0 \right) - \hbar M_I^* \epsilon_{0i\alpha\beta} S^{\alpha\beta}. \quad (5.103)$$

Mas:

$$\epsilon_{0i\alpha\beta} (\Pi^\alpha F^\beta - \Pi^\beta F^\alpha) = \epsilon_{0ijk} (\Pi^j F^k - \Pi^k F^j) = 2 \left(\vec{\Pi} \times \vec{F} \right)_i. \quad (5.104)$$

Portanto, usando (5.90), (5.93) e (5.94) e integrando na variável p_0 :

$$\hbar \left(D_t \vec{g}_0 + \vec{D} f_1 \right)_i + 2 \left(\vec{\Pi} \times \vec{g}_1 \right)_i = \hbar \int dp_0 M_I^* \epsilon_{ijk} S^{jk} \hat{e}_i. \quad (5.105)$$

Da equação (5.82) com $\alpha = i$, temos:

$$\Pi^i P + \frac{1}{4} \hbar \epsilon_{i\lambda\mu\nu} D_\lambda S_{\mu\nu} = \hbar M_I^* \Omega^i, \quad (5.106)$$

ou:

$$\Pi^i P + \frac{1}{4} \hbar \epsilon_{i0\mu\nu} D_0 S_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \hbar \epsilon_{ij\mu\nu} D_j S_{\mu\nu} = \hbar M_I^* \Omega^i. \quad (5.107)$$

Mas:

$$\epsilon_{i0\mu\nu} D_0 S_{\mu\nu} = -\epsilon_{imn} D_t S_{mn}, \quad (5.108)$$

e também:

$$\epsilon_{ij\mu\nu} D_j S_{\mu\nu} = \epsilon_{ij0k} D_j S_{0k} + \epsilon_{ijk0} D_j S_{k0} = 2\epsilon_{ijk} D_j S_{0k}. \quad (5.109)$$

Integrando:

$$\Pi^i \int dp_0 P - \frac{1}{4} D_t \epsilon_{imn} \int dp_0 S_{mn} + 2\hbar \epsilon_{ijk} D_j \int dp_0 S_{0k} = \hbar \int dp_0 M_I^* \Omega^i. \quad (5.110)$$

Usando as equações (5.91), (5.95) e (5.96), obtemos:

$$\hbar \left(D_t \vec{g}_3 - \vec{D} \times \vec{g}_2 \right) - 2\vec{\Pi} f_2 = -2\hbar \int dp_0 M_I^* \vec{\Omega}. \quad (5.111)$$

Tomando a equação (5.78), com as equações (5.90) e (5.105) e integrando:

$$\hbar \left(D_t f_1 + \vec{D} \cdot \vec{g}_0 \right) = -2 \int dp_0 M_R^* P. \quad (5.112)$$

Tomando a equação (5.81) com $\alpha = 0$,

$$\hbar D_t P + \epsilon^{0\lambda\mu\nu} \Pi_\lambda S_{\mu\nu} = 2M_R^* \Omega^0. \quad (5.113)$$

Usando as equações (5.91) e (5.96) e uma análoga à (5.108) e integrando:

$$\hbar D_t f_2 + 2\vec{\Pi} \cdot \vec{g}_3 = -2 \int dp_0 M_R^* \Omega^0. \quad (5.114)$$

Tomando a equação (5.83) com $\alpha = 0$ e $\beta = i$,

$$-\frac{\hbar}{2} \left(D^t \vec{F}^i - D^i F^0 \right) - \epsilon_{jki} \Pi^j \Omega^k = M_R^* S^{0i}, \quad (5.115)$$

ou seja:

$$-\frac{\hbar}{2} \left(D^t \vec{F}^i + D^i F^0 \right) - \left(\vec{\Pi} \times \vec{\Omega} \right)_i = M_R^* S^{0i}. \quad (5.116)$$

Usando (5.89), (5.93) e (5.94) e integrando:

$$\hbar \left(D^t \vec{g}_1 + \vec{D} f_0 \right) - 2\vec{\Pi} \times \vec{g}_0 = -2 \int dp_0 M_R^* S^{0i}. \quad (5.117)$$

Tomando a equação (5.79) com $\alpha = i$ e manipulando:

$$\vec{\Pi}_i F - \left(\frac{\hbar}{2} D_t S^{0i} + \vec{D}_j S^{ji} \right) = M_R^* \vec{F}^i. \quad (5.118)$$

Usando (5.92), (5.95) e (5.96) e integrando:

$$\vec{\Pi}_i f_3 - \frac{\hbar}{2} \left(-D_t g_{2i} + \vec{D}_j \int dp_0 S^{ji} \right) = \int dp_0 M_R^* \vec{F}^i. \quad (5.119)$$

Mas como:

$$\begin{aligned} \left(\vec{D} \times \vec{g}_3 \right)_i &= \epsilon_{imn} \vec{D}_m \frac{1}{2} \epsilon_{jkn} \int dp_0 S_{jk} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{mk} - \delta_{ik} \delta_{jm}) \vec{D}_m \int dp_0 S_{jk} \\ &= \frac{1}{2} \vec{D}_k \int dp_0 S_{ik} - \frac{1}{2} \vec{D}_j \int dp_0 S_{ji} = \vec{D}_j \int dp_0 S^{ij}, \end{aligned} \quad (5.120)$$

temos que:

$$\hbar \left(D_t \vec{g}_2 + \vec{D}_j \times \vec{g}_3 \right) + 2 \vec{\Pi}_i f_3 = 2 \int dp_0 M_R^* \vec{F}. \quad (5.121)$$

Tomando a equação (5.79) com $\alpha = 0$:

$$\Pi_0 F - \frac{\hbar}{2} D_\lambda S^{\lambda 0} = M_R^* F^0. \quad (5.122)$$

Usando a equação (5.95) e integrando:

$$\int dp_0 \Pi_0 F - \frac{\hbar}{2} \vec{D} \cdot \vec{g}_2 = \int dp_0 M_R^* F^0. \quad (5.123)$$

Podemos reescrever a integral em Π_0 usando a equação (5.64):

$$\Pi^0 \equiv p_0 + i\hbar \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s \tilde{F}^{0i} (x + i\hbar s \partial_p) \partial_p^i \equiv p_0 + \tilde{\Pi}^0(x, \vec{p}), \quad (5.124)$$

onde definimos:

$$\tilde{\Pi}^0(x, \vec{p}) = i\hbar \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s \tilde{F}^{0i}(\vec{x} + i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{p}}, t) \frac{\partial}{\partial p^i}, \quad (5.125)$$

segundo (ZHUANG; HEINZ, 1996). Desta forma:

$$\int dp_0 \left(p_0 + \tilde{\Pi}_0 \right) F - \frac{\hbar}{2} \vec{D} \cdot \vec{g}_2 = \int dp_0 M_R^* F^0, \quad (5.126)$$

e usando a equação (5.92), temos:

$$\int dp_0 p_0 F - \frac{\hbar}{2} \vec{D} \cdot \vec{g}_2 + \tilde{\Pi}_0 f_3 = \int dp_0 M_R^* F^0. \quad (5.127)$$

Tomando a equação (5.82) com $\alpha = 0$ e manipulando, vem:

$$\Pi^0 P + \frac{1}{2} \hbar D_i \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} S_{jk} + \hbar M_I^* \Omega^0, \quad (5.128)$$

Usando as equações (5.91) e (5.96) e integrando:

$$\int dp_0 p_0 P + \frac{1}{2} \hbar \vec{D} \cdot \vec{g}_3 + \tilde{\Pi}_0 f_2 = \hbar \int dp_0 M_I^* \Omega^0. \quad (5.129)$$

Tomando a equação (5.75), usando imediatamente as equações (5.89) e (5.94) e integrando:

$$\int dp_0 p_0 F_0 - \vec{\Pi} \cdot \vec{g}_1 + \tilde{\Pi}_0 f_0 = \int dp_0 M_R^* F. \quad (5.130)$$

Tomando a equação (5.84) com $\alpha = 0$ e $\beta = i$, e manipulando:

$$\Pi^0 \vec{F}_i - \vec{\Pi}_i F^0 + \frac{\hbar}{2} \epsilon_{jki} D_j \Omega_k = \hbar M_I^* S^{0i}. \quad (5.131)$$

Usando as equações (5.89), (5.93) e (5.94) e integrando:

$$\int dp_0 p_0 \vec{F} - \frac{\hbar}{2} \vec{D} \times \vec{g}_0 + \tilde{\Pi}_0 \vec{g}_1 = -\hbar \int dp_0 M_I^* S^{0i}. \quad (5.132)$$

Da equação (5.77), usando imediatamente as equações (5.90) e (5.93) e integrando:

$$\int dp_0 p_0 \Omega_0 + \vec{\Pi} \cdot \vec{g}_0 - \tilde{\Pi}_0 f_1 = -\hbar \int dp_0 M_I^* F. \quad (5.133)$$

Da equação (5.83), multiplicada por $\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta}$:

$$\frac{\hbar}{2}\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta}(D^\alpha F^\beta - D^\beta F^\alpha) + \epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\Pi_\lambda\Omega_\mu = M_R^*\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta}S^{\alpha\beta}, \quad (5.134)$$

e fazendo um procedimento análogo àquele pelo qual obtemos a equação (5.111),

$$\frac{\hbar}{2}\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta}(D^\alpha F^\beta - D^\beta F^\alpha) - 2(\Pi_\sigma\Omega_\tau - \Pi_\tau\Omega_\sigma) = M_R^*\epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta}S^{\alpha\beta}. \quad (5.135)$$

Tomando $\alpha = 0$:

$$\hbar\left(\vec{D} \times \vec{F}\right)_i + 2\Pi_0\vec{\Omega}_i - 2\Pi_i\vec{\Omega}_0 = -M_R^*\epsilon_{ijk}S^{jk}. \quad (5.136)$$

Usando as equações (5.90), (5.93) e (5.94) e integrando:

$$\int dp_0 p_0 \vec{\Omega} + \frac{\hbar}{2}\vec{D} \times \vec{g}_1 + \vec{\Pi}f_1 - \tilde{\Pi}_0\vec{g}_0 = -\int dp_0 M_R^*\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}S^{jk}. \quad (5.137)$$

Tomando a equação (5.80) com $\alpha = i$:

$$\frac{\hbar}{2}D^i = \Pi_0 S^{i0} + \hbar M_I^* F^i. \quad (5.138)$$

Mas como:

$$\left(\vec{\Pi} \times \vec{g}_3\right)_i = \vec{\Pi}_j \int dp_0 S^{ij}, \quad (5.139)$$

podemos usar as equações (5.92), (5.95) e (5.96) e integrar:

$$\int dp_0 p_0 S^{0i}\hat{e}_i - \frac{\hbar}{2}\vec{D}f_3 + \vec{\Pi} \times \vec{g}_3 - \tilde{\Pi}_0\vec{g}_2 = \hbar \int dp_0 M_I^*\vec{F}. \quad (5.140)$$

Tomando a equação (5.81) com $\alpha = i$:

$$-\hbar D^i P + \epsilon^{i0jk}\Pi_0 S_{jk} + \epsilon^{ij0k}\Pi_j S_{0k} + \epsilon^{ijk0}\Pi_j S_{k0} = 2M_R^*\Omega^i. \quad (5.141)$$

Usando as equações (5.91), (5.95) e (5.96) e integrando:

$$\hbar \vec{D}_i f_2 - \left(\int dp_0 p_0 \epsilon_{ijk} S_{jk} + 2\vec{\Pi}_0 g_{3i} \right) - 2\epsilon_{ijk} \vec{\Pi}_j g_{2k} = 2 \int dp_0 M_R^* \vec{\Omega}_i, \quad (5.142)$$

ou seja,

$$\int dp_0 p_0 \epsilon_{ijk} S_{jk} \hat{e}_i - \hbar \vec{D} f_2 + 2\vec{\Pi} \times \vec{g}_2 + 2\vec{\Pi}_0 \vec{g}_3 = -2 \int dp_0 M_R^* \vec{\Omega}. \quad (5.143)$$

Em suma, obtivemos oito equações:

$$\hbar \left(D_t f_0 + \vec{D} \cdot \vec{g}_1 \right) = 2\hbar \int dp_0 M_I^* F, \quad (5.144)$$

$$\hbar \left(D_t f_1 + \vec{D} \cdot \vec{g}_0 \right) = -2 \int dp_0 M_R^* P, \quad (5.145)$$

$$\hbar D_t f_2 + 2\vec{\Pi} \cdot \vec{g}_3 = -2 \int dp_0 M_R^* \Omega^0, \quad (5.146)$$

$$\hbar D_t f_3 - \vec{\Pi} \cdot \vec{g}_2 = \hbar \int dp_0 M_I^* \vec{F}, \quad (5.147)$$

$$\hbar \left(D_t \vec{g}_0 + \vec{D} f_1 \right) + 2 \left(\vec{\Pi} \times \vec{g}_1 \right)_i = \hbar \int dp_0 M_I^* \epsilon_{ijk} S^{jk} \hat{e}_i, \quad (5.148)$$

$$\hbar \left(D^t \vec{g}_1 + \vec{D} f_0 \right) - 2\vec{\Pi} \times \vec{g}_0 = -2 \int dp_0 M_R^* S^{0i}, \quad (5.149)$$

$$\hbar \left(D_t \vec{g}_2 + \vec{D}_j \times \vec{g}_3 \right) + 2\vec{\Pi}_i f_3 = 2 \int dp_0 M_R^* \vec{F}, \quad (5.150)$$

$$\hbar \left(D_t \vec{g}_3 - \vec{D} \times \vec{g}_2 \right) - 2\vec{\Pi} f_2 = -2\hbar \int dp_0 M_I^* \vec{\Omega}, \quad (5.151)$$

além de outras oito equações de vínculo, que não dependem da coordenada $t = x_0$:

$$\int dp_0 p_0 F - \frac{\hbar}{2} \vec{D} \cdot \vec{g}_2 + \tilde{\Pi}_0 f_3 = \int dp_0 M_R^* F^0, \quad (5.152)$$

$$\int dp_0 p_0 P + \frac{1}{2} \hbar \vec{D} \cdot \vec{g}_3 + \tilde{\Pi}_0 f_2 = \hbar \int dp_0 M_I^* \Omega^0, \quad (5.153)$$

$$\int dp_0 p_0 F_0 - \vec{\Pi} \cdot \vec{g}_1 + \tilde{\Pi}_0 f_0 = \int dp_0 M_R^* F, \quad (5.154)$$

$$\int dp_0 p_0 \vec{F} - \frac{\hbar}{2} \vec{D} \times \vec{g}_0 + \tilde{\Pi}_0 \vec{g}_1 = -\hbar \int dp_0 M_I^* S^{0i}, \quad (5.155)$$

$$\int dp_0 p_0 \Omega_0 + \vec{\Pi} \cdot \vec{g}_0 - \tilde{\Pi}_0 f_1 = -\hbar \int dp_0 M_I^* F, \quad (5.156)$$

$$\frac{\hbar}{2} \epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} (D^\alpha F^\beta - D^\beta F^\alpha) - 2 (\Pi_\sigma \Omega_\tau - \Pi_\tau \Omega_\sigma) = M_R^* \epsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \quad (5.157)$$

$$\int dp_0 p_0 S^{0i} \hat{e}_i - \frac{\hbar}{2} \vec{D} f_3 + \vec{\Pi} \times \vec{g}_3 - \tilde{\Pi}_0 \vec{g}_2 = \hbar \int dp_0 M_I^* \vec{F}, \quad (5.158)$$

$$\int dp_0 p_0 \epsilon_{ijk} S_{jk} \hat{e}_i - \hbar \vec{D} f_2 + 2\vec{\Pi} \times \vec{g}_2 + 2\tilde{\Pi}_0 \vec{g}_3 = -2 \int dp_0 M_R^* \vec{\Omega}. \quad (5.159)$$

Vamos, agora, tomar o limite clássico das equações cinéticas para a função de Wigner. Para isto, primeiro notamos que a equação (5.65), no limite $\hbar \rightarrow 0$, pode ser escrita como:

$$(\gamma^\mu p_\mu - M^*(x)) W_4(x, p) = 0, \quad (5.160)$$

que tem a forma de uma equação de Dirac. Multiplicando por $\gamma^\nu p_\nu + M^*$, temos:

$$(\gamma^\nu p_\nu + M^*) (\gamma^\mu p_\mu - M^*(x)) W_4(x, p) = 0, \quad (5.161)$$

ou seja,

$$(\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu - M^{*2}(x)) W_4(x, p) = 0. \quad (5.162)$$

Mas:

$$\begin{aligned} \gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu &= \frac{1}{2} (p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu + p_\nu p_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu 2g^{\mu\nu} = p^2. \end{aligned} \quad (5.163)$$

Logo,

$$(p^2 - M^{*2}) W_4(x, p) = 0, \quad (5.164)$$

ou seja, a função de Wigner está na camada de massa. Definindo $E_p = \sqrt{p^2 + M^{*2}}$, podemos escrever a componente de ordem zero em \hbar , $W_4^{(0)}(x, p)$, como:

$$W_4^{(0)}(x, p) = W_4^{(+)(0)}(x, p) \delta(p_0 - E_p) + W_4^{(-)(0)}(x, p) \delta(p_0 + E_p), \quad (5.165)$$

onde os índices mais e menos correspondem às contribuições de energia positiva e negativa, respectivamente. Com esta decomposição, as funções $f_\alpha(x, \vec{p})$ e $\vec{g}_{\alpha i}(x, \vec{p})$ podem ser decompostas de maneira similar, e todas as integrais na coordenada p_0 tornam-se triviais devido às funções delta, resultando nos vínculos:

$$f_3^{(\pm)(0)} = \pm \frac{M^*}{E_p} f_0^{(\pm)(0)}, \quad (5.166)$$

$$f_2^{(\pm)(0)} = 0, \quad (5.167)$$

$$\pm E_p f_0^{(\pm)(0)} - \vec{p} \cdot \vec{g}_1^{(\pm)(0)} = M^* f_3^{(\pm)(0)}, \quad (5.168)$$

$$\vec{g}_1^{(\pm)(0)} = \pm \frac{\vec{p}}{E_p} f_0^{(\pm)(0)}, \quad (5.169)$$

$$-(\pm)E_p f_1^{(\pm)(0)} + \vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)} = 0, \quad (5.170)$$

$$-(\pm)E_p \vec{g}_0^{(\pm)(0)} + \vec{p} f_1^{(\pm)(0)} = -M^* \vec{g}_3^{(\pm)(0)}, \quad (5.171)$$

$$(\pm)E_p \vec{g}_2^{(\pm)(0)} = \vec{p} \times \vec{g}_3^{(\pm)(0)}, \quad (5.172)$$

$$\pm 2E_p \vec{g}_3^{(\pm)(0)} + 2\vec{p} \times \vec{g}_2^{(\pm)(0)} = 2M^* \vec{g}_0^{(\pm)(0)}. \quad (5.173)$$

Estas equações podem ser reescritas de forma a mostrar que todos os vínculos dependem apenas de $f_0^{(\pm)(0)}$ e $\vec{g}_0^{(\pm)(0)}$, obtendo para os demais fatores:

$$f_1^{(\pm)(0)} = \pm \frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p}, \quad (5.174)$$

$$f_2^{(\pm)(0)} = 0, \quad (5.175)$$

$$f_3^{(\pm)(0)} = \pm \frac{M^*}{E_p} f_0^{(\pm)(0)}, \quad (5.176)$$

$$\vec{g}_1^{(\pm)(0)} = \pm \frac{\vec{p}}{E_p} f_0^{(\pm)(0)}, \quad (5.177)$$

$$\vec{g}_2^{(\pm)(0)} = \frac{\vec{p} \times \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{M^*}, \quad (5.178)$$

$$\vec{g}_3^{(\pm)(0)} = \pm \frac{E_p^2 \vec{g}_0^{(\pm)(0)} - (\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}) \vec{p}}{M^* E_p}. \quad (5.179)$$

5.4 EQUAÇÕES DE TRANSPORTE

As equações de transporte irão surgir ao levarmos em conta ordens além de zero em \hbar nas equações cinéticas. A equação de Vlasov, particularmente, corresponde a considerar as equações até primeira ordem. Vamos partir da equação (5.144), repetida aqui:

$$\hbar \left(D_t f_0 + \vec{D} \cdot \vec{g}_1 \right) = 2\hbar \int dp_0 M_I^* F. \quad (5.180)$$

Para eliminarmos consistentemente os termos de ordem \hbar^2 ou maior, notamos que D_μ e Π_μ podem ser escritos como:

$$D_\mu \equiv \partial_{x\mu} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \tilde{F}_{\mu\nu}(x + i\hbar s \partial_p) \partial_p^\nu = \partial_{x\mu} - \tilde{F}_{\mu\nu} \partial_p^\nu + O(\hbar), \quad (5.181)$$

$$\Pi_\mu \equiv p_\mu + i\hbar \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds s \tilde{F}_{\mu\nu}(x + i\hbar s \partial_p) \partial_p^\nu = p_\mu + O(\hbar^2). \quad (5.182)$$

Também vamos explicitar a decomposição da massa efetiva em suas partes real e imaginária, utilizada na seção anterior:

$$\begin{aligned} M^*(x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) &\equiv M_R^* + i\hbar M_I^* = M^*(x) \frac{-i\hbar}{2} (\partial_x M^*) \cdot \partial_p \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 (\partial_x^2 M^*) \cdot \partial_p^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^3 (\partial_x^3 M^*) \cdot \partial_p^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.183)$$

ou de modo mais formal, seguindo os passos encontrados em (ELZE et al., 1987), definimos:

$$\Delta \equiv \partial_x \partial_p, \quad (5.184)$$

de forma que:

$$\Delta M^* = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} M^* \right) \frac{\partial}{\partial p^\mu} \equiv \partial_x M^* \cdot \partial_p, \quad (5.185)$$

$$\begin{aligned} M^*(x - \frac{i\hbar}{2} \partial_p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i\hbar}{2} \right)^n \Delta^n M^*(x) \\ &= \cos \left(\frac{\hbar}{2} \Delta \right) M^* - i \sin \left(\frac{\hbar}{2} \Delta \right) M^* \equiv M_R^* + i\hbar M_I^*. \end{aligned} \quad (5.186)$$

Temos que:

$$M_R^*(x) = M^*(x) + O(\hbar^2), \quad (5.187)$$

$$M_I^*(x) = -\frac{1}{2} (\partial_{x\mu} M^*(x)) \partial_p^\mu + O(\hbar^2). \quad (5.188)$$

Substituindo na equação (5.180) as expansões que obtivemos:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t - F_{0\nu} \partial_p^\nu \right) f_0^{(\pm)(0)} + \left(\nabla_{xi} + \tilde{F}_{ij} \frac{\partial}{\partial p^j} \right) g_{1i}^{(\pm)(0)} \\ &= - \int dp_0 \left(\partial_{x\mu} M^* \right) \partial_p^\mu F^{(\pm)(0)}. \end{aligned} \quad (5.189)$$

A integral em p_0 pode ser simplificada notando que estamos na camada de massa e, portanto:

$$\begin{aligned} \int dp_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^0} M^* \right) \frac{\partial}{\partial p^0} F^{(\pm)(0)} &= \frac{\partial}{\partial x^0} M^* \int dp_0 \frac{\partial}{\partial p^0} F^{(\pm)(0)} \\ &= M^* F^{(\pm)(0)} \Big|_{p_0=-\infty}^{p_0=\infty} = 0. \end{aligned} \quad (5.190)$$

Logo,

$$\begin{aligned} - \int dp_0 \left(\partial_{x\mu} M^* \right) \partial_p^\mu F^{(\pm)(0)} &= \int dp_0 \frac{\partial}{\partial x^i} M^* \frac{\partial}{\partial p^i} F^{(\pm)(0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} M^* \frac{\partial}{\partial p^i} \int dp_0 F^{(\pm)(0)}, \end{aligned} \quad (5.191)$$

que podemos escrever como:

$$2 \int dp_0 M_I^* f = \vec{\nabla} M^* \cdot \vec{\nabla}_p \int dp_0 f. \quad (5.192)$$

Por analogia com a teoria eletromagnética, vamos definir os seguintes operadores: $\tilde{E}_i \equiv \tilde{F}_{0i}$, $\tilde{B}_1 \equiv -\tilde{F}_{23}$, $\tilde{B}_2 \equiv -\tilde{F}_{31}$ e $\tilde{B}_3 \equiv -\tilde{F}_{12}$, que são análogos aos campos elétrico e magnético. Com essas definições, D_μ em ordem zero é dado por:

$$D_t \equiv \partial_t - \tilde{F}_{0\nu} \partial_p^\nu = \partial_t - \tilde{F}_{0i} \partial_p^i = \partial_t + \vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\nabla}_p, \quad (5.193)$$

$$D_i \equiv \vec{\nabla}_{xi} - \tilde{F}_{ij} \partial_p^j = \left(\vec{\nabla}_x + \vec{\tilde{B}} \times \vec{\nabla}_p \right)_i. \quad (5.194)$$

Portanto, podemos reescrever a equação (5.189) como:

$$\left(\partial_t + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_p\right) f_0^{(\pm)(0)} + \left(\nabla_x + \vec{B} \times \vec{\nabla}_p\right) g_{1i}^{(\pm)(0)} = \left(\vec{\nabla}_x M^*\right) \vec{\nabla}_p f_3^{(\pm)(0)}, \quad (5.195)$$

que podemos escrever em função de $f_0^{(\pm)(0)}$ usando os vínculos:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_p\right) f_0^{(\pm)(0)} \pm \left(\nabla_x + \vec{B} \times \vec{\nabla}_p\right) \cdot \frac{\vec{p}}{E_p} f_0^{(\pm)(0)} \\ &= \pm \vec{\nabla}_x M^* \cdot \vec{\nabla}_p \frac{M^*}{E_p} f_0^{(\pm)(0)}, \end{aligned} \quad (5.196)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{p}}{E_p} f_0\right) &= \left[\vec{\nabla}_x \left(\frac{\vec{p}}{E_p}\right)\right] + \frac{\vec{p}}{E_p} \cdot \vec{\nabla}_x f_0 \\ &= -\frac{M^*(x) \left(\vec{\nabla}_x M^*(x)\right)}{E_p^3} \cdot \vec{p} f_0 + \frac{\vec{p}}{E_p} \cdot \vec{\nabla}_x f_0 \\ &= -\frac{M^*(x)}{E_p^3} \vec{p} \cdot \left(\vec{\nabla}_x M^*(x)\right) f_0 + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_0, \end{aligned} \quad (5.197)$$

onde definimos $\vec{v} \equiv \frac{\vec{p}}{E_p}$. Também podemos obter:

$$\begin{aligned} \vec{B} \times \vec{\nabla}_p \cdot \left(\frac{\vec{p}}{E_p} f_0\right) &= \epsilon_{ijk} \tilde{B}_j \frac{\partial}{\partial p^k} \frac{p^i}{E_p} f_0 \\ &= \epsilon_{ijk} \tilde{B}_j \left(\frac{\delta_{ik}}{E_p} - \frac{p^i p^k}{E_p^3}\right) f_0 + \epsilon_{ijk} \tilde{B}_j \frac{p^i}{E_p} \frac{\partial}{\partial p^k} f_0 \\ &= \vec{v} \times \vec{B} \cdot \vec{\nabla}_p f_0, \end{aligned} \quad (5.198)$$

e também:

$$\vec{\nabla}_p \frac{M^*}{E_p} f_0 = M^* \left(\frac{-\vec{p}}{E_p^3} f_0 + \frac{1}{E_p} \vec{\nabla}_p f_0\right). \quad (5.199)$$

Substituindo as equações (5.197), (5.198) e (5.199) na equação (5.196):

$$\begin{aligned}
& \left(\partial_t + \tilde{\vec{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \right) f_0^{(\pm)(0)} \pm \left(\frac{-M^*}{E_p^3} \vec{p} \cdot \nabla_x M^* f_0^{(\pm)(0)} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_0^{(\pm)(0)} \right) \\
& \pm \vec{v} \times \tilde{\vec{B}} \cdot \vec{\nabla}_p f_0^{(\pm)(0)} \mp M^* \vec{\nabla}_x M^* \left(\frac{-\vec{p}}{E_p^3} + \frac{1}{E_p} \vec{\nabla}_p f_0^{(\pm)(0)} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{5.200}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& \partial_t f_0^{(\pm)(0)} \pm \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_0^{(\pm)(0)} + \left(\tilde{\vec{E}} \pm \vec{v} \times \tilde{\vec{B}} \right) \cdot \vec{\nabla}_p f_0^{(\pm)(0)} \\
& \mp \frac{M^*}{E_p} \vec{\nabla}_x M^* \cdot \vec{\nabla}_p f_0^{(\pm)(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.201}$$

Esta última é a equação de Vlasov usual, como queríamos obter. Para completar a descrição dinâmica em ordem zero, vamos obter também uma equação para $\vec{g}_0^{(\pm)(0)}$. Dispondo de equações para esses dois fatores, todos os demais podem ser obtidos através das equações de vínculo, e o sistema está totalmente descrito nessa aproximação. Tomaremos, então, a equação (5.151), e usaremos também as equações (5.93) e (5.183):

$$\begin{aligned}
& \hbar \left(D_t \vec{g}_3 - \vec{D} \times \vec{g}_2 \right) - 2\vec{\Pi} f_2 = -2\hbar \int dp_0 M_I^* \vec{\Omega} \\
& = -\hbar \left(\vec{\nabla}_x M^* \right) \cdot \vec{\nabla}_p \int dp_0 \vec{\Omega} = \hbar \left(\vec{\nabla}_x M^* \right) \cdot \vec{\nabla}_p \vec{g}_0.
\end{aligned} \tag{5.202}$$

Agora, tomamos a equação (5.152) e usamos a equação (5.91):

$$\hbar \left(D_t f_1 + \vec{D} \times \vec{g}_0 \right) = -2 \int dp_0 M^* P = -2M^* f_2. \tag{5.203}$$

Substituindo na equação anterior:

$$D_t \vec{g}_3 - \vec{D} \times \vec{g}_2 + 2\vec{\Pi} \frac{1}{M^*} \left(D_t f_1 + \vec{D} \cdot \vec{g}_0 \right) = \left(\vec{\nabla}_x M^* \right) \cdot \vec{\nabla}_p \vec{g}_0. \tag{5.204}$$

Usando as equações de vínculo para reescrever \vec{g}_2 e \vec{g}_3 em função de \vec{g}_0 e as equações (5.193) e (5.194) para reescrever D_μ , temos:

$$\begin{aligned}
& \pm \left(\partial_t + \tilde{\vec{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \right) \frac{E_p^2 \vec{g}_0^{(\pm)(0)} - \left(\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)} \right)}{M^* E_p} \\
& - \left(\vec{\nabla}_x + \tilde{\vec{B}} \times \vec{\nabla}_p \right) \times \left(\frac{\vec{p} \times \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{M^*} \right) \\
& + \frac{\vec{p}}{M^*} \left[\pm \left(\partial_t + \tilde{\vec{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \right) \frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} + \left(\vec{\nabla}_x + \tilde{\vec{B}} \times \vec{\nabla}_p \right) \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)} \right] \\
& - \vec{\nabla}_x M^* \cdot \vec{\nabla}_p \vec{g}_0^{(\pm)(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.205}$$

Efetutando as derivadas, com o cuidado de notar que M^* e E_p dependem de x_μ , temos:

$$\begin{aligned}
& \pm \partial_t \left(E_p \frac{\vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{M^*} \right) \mp \partial_t \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)} \vec{p}}{M^* E_p} \right) \pm \tilde{\vec{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \frac{E_p \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{M^*} \\
& \mp \tilde{\vec{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)} \vec{p}}{M^* E_p} \right) - \vec{\nabla}_x \times \left(\frac{\vec{p} \times \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{M^*} \right) \\
& - \left(\tilde{\vec{B}} \times \vec{\nabla}_p \right) \times \left(\frac{\vec{p} \times \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{M^*} \right) - \vec{\nabla}_x M^* \cdot \vec{\nabla}_p \vec{g}_0^{(\pm)(0)} \\
& \pm \frac{\vec{p}}{M^*} \partial_t \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \right) \pm \frac{\vec{p}}{M^*} \tilde{\vec{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \right) \\
& + \frac{\vec{p}}{M^*} \vec{\nabla}_x \vec{g}_0^{(\pm)(0)} + \frac{\vec{p}}{M^*} \tilde{\vec{B}} \times \vec{\nabla}_p \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)} = 0,
\end{aligned} \tag{5.206}$$

dado que:

$$\partial_t \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \frac{\vec{p}}{M^*} \right) = \partial_t \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \right) \frac{\vec{p}}{M^*} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \partial_t \frac{\vec{p}}{M^*}, \tag{5.207}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \frac{\vec{p}}{M^*} \right) &= \left[\vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \right) \right] \frac{\vec{p}}{M^*} \\
&+ \frac{\vec{p} \cdot \vec{g}_0^{(\pm)(0)}}{E_p} \vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\nabla}_p \frac{\vec{p}}{M^*}.
\end{aligned} \tag{5.208}$$

5.5 CÁLCULO DA FUNÇÃO DE EQUILÍBRIO COM UM CAMPO MAGNÉTICO FORTE

Como discutimos na seção anterior, a função de Wigner no limite $\hbar \rightarrow 0$ está na camada de massa. Com este vínculo, dado pela equação (5.164), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
W_4^{(0)}(x, p) &= W_4^{(+)(0)}(x, p) \theta(p_0) \delta(p^2 - M^{*2}) \\
&+ W_4^{(-)(0)}(x, p) \theta(-p_0) \delta(p^2 - M^{*2}),
\end{aligned} \tag{5.209}$$

isto é, podemos separar as contribuições de energia positiva e negativa. Vamos supor que nosso sistema consiste em matéria nuclear composta de nêutrons, prótons e elétrons no modelo de Walecka com interação isovetorial, na presença de um campo magnético forte na direção z:

$$\vec{B} = B \hat{k}, \tag{5.210}$$

e vamos considerar o calibre de Landau:

$$A^\mu = (0, 0, Bx_1, 0) = (0, \vec{A}) \Rightarrow \vec{A} = Bx_1 \hat{e}_2, \tag{5.211}$$

que fornece $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B \hat{e}_3$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Vamos, então, calcular a nossa função de distribuição de equilíbrio, $f_0^{(\pm)(0)}$, que satisfaz uma equação generalizada de Vlasov, como demonstramos. Por definição, temos:

$$f_0^{(\pm)(0)}(t, \vec{x}, \vec{p}) = \int dp_0 \, Tr[\gamma^0 W_4^{(\pm)(0)}(x, p)], \tag{5.212}$$

Para escrever a função no equilíbrio, vamos utilizar o operador matriz densidade, $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hat{H} - \mu N)}. \quad (5.213)$$

Na situação em que o sistema se encontra em equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned} f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) = & \int dp_0 \operatorname{Tr}[\hat{\rho} \gamma^0 \int d^4 y e^{-ip \cdot y} \\ & \times \hat{\Psi}(x_+) e^{-iy \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}^{(0)}(x+ys)} \hat{\Psi}(x_-)]. \end{aligned} \quad (5.214)$$

No equilíbrio, temos para os núcleons:

$$\mathcal{V}^{(0)\mu} = g_v V^{(0)\mu} + \frac{g_\rho}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{b}^{(0)\mu} + \frac{e}{2} (1 + \tau_j) A^{(0)\mu}, \quad (5.215)$$

e para os elétrons:

$$\mathcal{V}^{(0)\mu} = -e A^{(0)\mu}. \quad (5.216)$$

Os campos são:

$$A^{(0)\mu} = (A_0, 0, Bx_1, 0), \quad (5.217)$$

$$V^{(0)\mu} = (V_0, 0, 0, 0), \quad (5.218)$$

$$b^{(0)\mu} = (b_0, 0, 0, 0), \quad (5.219)$$

com A_0 , V_0 e b_0 constantes. Logo,

$$\mathcal{V}^{(0)\mu} = (\mathcal{V}_0, 0, Bx_1, 0), \quad (5.220)$$

e a fase na equação (5.214) pode ser calculada explicitamente:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds \mathcal{V}^{(0)}(x+ys) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ds (\mathcal{V}_0, 0, x_1 + y_1 s, 0) = (\mathcal{V}_0, 0, Bx_1, 0) = \mathcal{V}^{(0)\mu}, \quad (5.221)$$

pois a integral simétrica se anula. Portanto, podemos reescrever a equação (5.214) como:

$$f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) = \int dp_0 \text{Tr}[\hat{\rho}\gamma^0 \int d^4y e^{-i(p+\mathcal{V}^{(0)})\cdot y} \hat{\Psi}(x_+) \hat{\Psi}(x_-)]. \quad (5.222)$$

Vamos considerar os operadores de campo fermiônico:

$$\hat{\Psi} = \sum_r \Psi_r^{(+)}(x) a_r + \Psi_r^{(-)}(x) d_r^\dagger, \quad (5.223)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger = \sum_r \Psi_r^{(+)\dagger}(x) a_r^\dagger + \Psi_r^{(-)\dagger}(x) d_r, \quad (5.224)$$

para os quais os estados de base são:

$$\Psi_r^{(+)}(x) = u_r(x) e^{-i(E_r t - p_2 x_2 - p_3 x_3)}, \quad (5.225)$$

$$\Psi_r^{(-)}(x) = v_r(x) e^{i(E_r t - p_2 x_2 - p_3 x_3)}, \quad (5.226)$$

onde a soma em r significa soma nos estados n , nos spins, e em p_2 e p_3 , e $E_r = E(p_3, n) = \sqrt{p_3^2 + M^{*2} + 2eBn}$ são energias dos níveis de Landau. Os estados de base são soluções da equação de Dirac. Supomos o *ansatz*:

$$\Psi^{(+)}(t, \vec{x}) = u_r(x_1) e^{-i(E_n^\pm t - p_2 x_2 - p_3 x_3)}, \quad (5.227)$$

$$\Psi^{(-)}(t, \vec{x}) = v_r(x_1) e^{i(E_n^\pm t - p_2 x_2 - p_3 x_3)}, \quad (5.228)$$

com

$$E_n^{(\pm)} = \sqrt{p_3^2 + M^{*2} + 2eBn} \pm \mathcal{V}_0^{(0)}, \quad (5.229)$$

sendo o mais ou menos, nesta equação em particular, referente ao sinal da carga elétrica, de forma a escrever a equação para todas as espécies de forma condensada. Os espinores u e v aqui dependem também do sinal da carga elétrica:

$$u_{e,s=1} = N_+ \begin{bmatrix} v_{n-1}(\xi^{(+)}) \\ 0 \\ \frac{p_3}{E_n^- + M^*} v_{n-1}(\xi^{(+)}) \\ \frac{ip_n}{\epsilon_n + M^*} v_n(\xi^{(+)}) \end{bmatrix}, \quad (5.230)$$

$$u_{p,s=1} = N_+ \begin{bmatrix} v_n(\xi^{(+)}) \\ 0 \\ \frac{p_3}{E_n^+ + M^*} v_n(\xi^{(+)}) \\ \frac{-ip_n}{\epsilon_n + M^*} v_{n-1}(\xi^{(+)}) \end{bmatrix}, \quad (5.231)$$

$$u_{e,s=-1} = N_+ \begin{bmatrix} 0 \\ v_n(\xi^{(+)}) \\ \frac{-ip_n}{E_n^- + M^*} v_{n-1}(\xi^{(+)}) \\ \frac{-p_3}{\epsilon_n + M^*} v_n(\xi^{(+)}) \end{bmatrix}, \quad (5.232)$$

$$u_{p,s=-1} = N_+ \begin{bmatrix} 0 \\ v_{n-1}(\xi^{(+)}) \\ \frac{ip_n}{E_n^+ + M^*} v_n(\xi^{(+)}) \\ \frac{-p_3}{\epsilon_n + M^*} v_{n-1}(\xi^{(+)}) \end{bmatrix}, \quad (5.233)$$

$$v_{e,s=1} = N_- \begin{bmatrix} v_{n-1}(\xi^{(-)}) \\ 0 \\ \frac{-p_3}{-E_n^- + M^*} v_{n-1}(\xi^{(-)}) \\ \frac{ip_n}{\epsilon_n + M^*} v_n(\xi^{(-)}) \end{bmatrix}, \quad (5.234)$$

$$v_{p,s=1} = N_- \begin{bmatrix} v_n(\xi^{(-)}) \\ 0 \\ \frac{-p_3}{-E_n^+ + M^*} v_n(\xi^{(-)}) \\ \frac{ip_n}{\epsilon_n + M^*} v_{n-1}(\xi^{(-)}) \end{bmatrix}, \quad (5.235)$$

$$v_{e,s=-1} = N_- \begin{bmatrix} 0 \\ v_n(\xi^{(-)}) \\ \frac{-ip_n}{E_n^- + M^*} v_{n-1}(\xi^{(-)}) \\ \frac{-p_3}{-\epsilon_n + M^*} v_n(\xi^{(-)}) \end{bmatrix}, \quad (5.236)$$

$$v_{p,s=-1} = N_- \begin{bmatrix} 0 \\ v_{n-1}(\xi^{(-)}) \\ \frac{ip_n}{E_n^+ + M^*} v_n(\xi^{(-)}) \\ \frac{-p_3}{-\epsilon_n + M^*} v_{n-1}(\xi^{(-)}) \end{bmatrix}, \quad (5.237)$$

com

$$N^{(\pm)} = \frac{1+s}{2} \frac{(eB)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pm E_n^\pm + M^*}}{\sqrt{2E_n^\pm} \sqrt{L_2 L_3}}, \quad (5.238)$$

$$\xi^{(+)} = \sqrt{eB} \left(x_1 + \frac{p_2}{eB} \right), \quad (5.239)$$

$$\xi^{(-)} = \sqrt{eB} \left(x_1 - \frac{p_2}{eB} \right), \quad (5.240)$$

$$\epsilon_n = \sqrt{p_3^2 + M^{*2} + 2eBn}, \quad (5.241)$$

$$p_n = \sqrt{2eBn}, \quad (5.242)$$

$$v_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{\frac{1}{2}} 2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (5.243)$$

sendo que estes estados formam uma base ortonormal. Para calcular a função de distribuição de equilíbrio, vamos considerar os produtos de operadores em ordem normal, de forma a desprezar efeitos do vácuo:

$$: \hat{\hat{\Psi}}(x + \frac{y}{2}) \gamma_0 \hat{\Psi}(x - \frac{y}{2}) :=: \hat{\Psi}^\dagger(x_+) \hat{\Psi}(x_-) :. \quad (5.244)$$

Como temos um operador de um corpo e estamos usando a base que diagonaliza \hat{H} , podemos calcular o traço na equação (5.222):

$$\begin{aligned} Tr[\hat{\rho} : \hat{\hat{\Psi}} \gamma_0 \hat{\Psi} :]^{(0)} &= \sum_q \hat{\Psi}_q^{(+)\dagger}(x_+) \hat{\Psi}_q^{(+)}(x_-) \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_q - \mu)}} \\ &\quad - \sum_q \hat{\Psi}_q^{(-)\dagger}(x_+) \hat{\Psi}_q^{(-)}(x_-) \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_q + \mu)}}, \end{aligned} \quad (5.245)$$

onde o índice q se refere à carga da partícula. Substituindo os espinores, obtemos:

$$\begin{aligned}
Tr[\hat{\rho} : \hat{\Psi}\gamma_0\hat{\Psi} :]^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_2} \sum_{p_3} \\
&\left\{ \left[u_{s=1}^{\dagger}(x_+) u_{s=1}(x_-) e^{i(E^{(+)}x_{0+} - p_2x_{2+} - p_3x_{3+})} e^{-i(E^{(+)}x_{0-} - p_2x_{2-} - p_3x_{3-})} \right. \right. \\
&+ u_{s=-1}^{\dagger}(x_+) u_{s=-1}(x_-) e^{i(E^{(+)}x_{0+} - p_2x_{2+} - p_3x_{3+})} e^{-i(E^{(+)}x_{0-} - p_2x_{2-} - p_3x_{3-})} \left. \right] \\
&\times \frac{1}{1 + e^{\beta(E^{(+)} - \mu)}} \\
&- \left[v_{s=1}^{\dagger}(x_+) v_{s=1}(x_-) e^{-i(E^{(-)}x_{0+} - p_2x_{2+} - p_3x_{3+})} e^{i(E^{(-)}x_{0-} - p_2x_{2-} - p_3x_{3-})} \right. \\
&+ v_{s=-1}^{\dagger}(x_+) v_{s=-1}(x_-) e^{-i(E^{(-)}x_{0+} - p_2x_{2+} - p_3x_{3+})} e^{i(E^{(-)}x_{0-} - p_2x_{2-} - p_3x_{3-})} \left. \right] \\
&\times \frac{1}{1 + e^{\beta(E^{(+)} + \mu)}} \left. \right\}. \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_2} \sum_{p_3} \left\{ N_+^2 \left[v_{n-1}(\xi_+^{(+)}) v_{n-1}(\xi_-^{(+)}) \right. \right. \\
&+ \frac{p_3^2}{(\epsilon_n + M^*)^2} v_{n-1}(\xi_+^{(+)}) v_{n-1}(\xi_-^{(+)}) \\
&+ \frac{p_n^2}{(\epsilon_n + M^*)^2} v_n(\xi_+^{(+)}) v_n(\xi_-^{(+)}) + v_n(\xi_+^{(+)}) v_n(\xi_-^{(+)}) \\
&+ \frac{p_n^2}{(\epsilon_n + M^*)^2} v_{n-1}(\xi_+^{(+)}) v_{n-1}(\xi_-^{(+)}) \\
&+ \left. \left. \frac{p_3^2}{(\epsilon_n + M^*)^2} v_n(\xi_+^{(+)}) v_n(\xi_-^{(+)}) \right] \frac{e^{i(E^{(+)}y_0 - p_2y_2 - p_3y_3)}}{1 + e^{\beta(E^{(+)} - \mu)}} \right. \\
&+ N_-^2 \left[v_{n-1}(\xi_+^{(-)}) v_{n-1}(\xi_-^{(-)}) + \frac{p_3^2}{(-\epsilon_n + M^*)^2} v_{n-1}(\xi_+^{(-)}) v_{n-1}(\xi_-^{(-)}) \right. \\
&+ \frac{p_n^2}{(-\epsilon_n + M^*)^2} v_n(\xi_+^{(-)}) v_n(\xi_-^{(-)}) + v_n(\xi_+^{(-)}) v_n(\xi_-^{(-)}) \\
&+ \frac{p_n^2}{(-\epsilon_n + M^*)^2} v_{n-1}(\xi_+^{(-)}) v_{n-1}(\xi_-^{(-)}) \\
&+ \left. \left. \frac{p_3^2}{(-\epsilon_n + M^*)^2} v_n(\xi_+^{(-)}) v_n(\xi_-^{(-)}) \right] \frac{e^{-i(E^{(-)}y_0 - p_2y_2 - p_3y_3)}}{1 + e^{\beta(E^{(-)} + \mu)}} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.246}$$

Levando em conta a normalização, e definindo o potencial quí-

mico efetivo para o caso do próton:

$$\tilde{\mu} = \mu - \mathcal{V}_0^{(0)}, \quad (5.247)$$

temos, após algumas manipulações, que:

$$\begin{aligned} Tr[\hat{\rho} : \hat{\Psi}\gamma_0\hat{\Psi} :]^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p'_2} \sum_{p'_3} \frac{\sqrt{eB}}{L_2 L_3} \\ &\frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \left\{ \left[v_{n-1}(\xi_+^{(+)})v_{n-1}(\xi_-^{(+)}) + v_n(\xi_+^{(+)})v_n(\xi_-^{(+)}) \right] \right. \\ &\times \frac{e^{i(E^{(+)}y_0 - p'_2 y_2 - p'_3 y_3)}}{1 + e^{\beta(\epsilon_n - \tilde{\mu})}} \\ &+ \frac{-\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \left[v_{n-1}(\xi_+^{(-)})v_{n-1}(\xi_-^{(-)}) + v_n(\xi_+^{(-)})v_n(\xi_-^{(-)}) \right] \\ &\left. \times \frac{e^{-i(E^{(-)}y_0 - p'_2 y_2 - p'_3 y_3)}}{1 + e^{\beta(E_n + \tilde{\mu})}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.248)$$

Substituindo na função de equilíbrio, obtemos:

$$\begin{aligned}
f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p'_2} \sum_{p'_3} \frac{\sqrt{eB}}{L_2 L_3} \left[\frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \int dp_0 \right. \\
&\times \int dy_0 e^{i[p_0 + \mathcal{V}_0^{(0)} - (\epsilon_n + \mathcal{V}_0^{(0)})]y_0} \int dy_2 e^{+i(p_2 + eBx_1 - p'_2)y_2} \\
&\times \int dy_3 e^{i(p_3 - p'_3)y_3} \\
&\times \int dy_1 e^{ip_1 y_1} v_{n-1}(\xi_+^{(+)}) v_{n-1}(\xi_-^{(+)}) + v_n(\xi_+^{(+)}) v_n(\xi_-^{(+)}) \\
&\times \frac{1}{1 + e^{\beta(E_n - \hat{\mu})}} \\
&+ \frac{-\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \int dp_0 \int dy_0 e^{-i[p_0 + \mathcal{V}_0^{(0)} + (E_n - \mathcal{V}_0^{(0)})]y_0} \\
&\times \int dy_2 e^{+i(p_2 + eBx_1 + p'_2)y_2} \int dy_3 e^{i(p_3 + p'_3)y_3} \\
&\times \int dy_1 e^{ip_1 y_1} v_{n-1}(\xi_+^{(-)}) v_{n-1}(\xi_-^{(-)}) + v_n(\xi_+^{(-)}) v_n(\xi_-^{(-)}) \\
&\times \left. \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_n + \hat{\mu})}} \right]. \tag{5.249}
\end{aligned}$$

Das equações (5.239) e (5.240):

$$\xi_{\pm}^{(+)} = \xi^{(+)} \left(x \pm \frac{y}{2} \right) = \sqrt{eB} \left(x_1 \pm \frac{y_1}{2} + \frac{p_2}{eB} \right), \tag{5.250}$$

$$\xi_{\pm}^{(-)} = \xi^{(-)} \left(x \pm \frac{y}{2} \right) = \sqrt{eB} \left(x_1 \pm \frac{y_1}{2} - \frac{p_2}{eB} \right). \tag{5.251}$$

Como:

$$\frac{1}{L_2} \int dy_2 e^{i(p_2 + eBx_1 - p'_2)y_2} = \delta_{p'_2, p_2 + eBx_1}, \tag{5.252}$$

$$\frac{1}{L_3} \int dy_3 e^{i(p_3 - p'_3)y_3} = \delta_{p'_3, p_3}, \tag{5.253}$$

e também:

$$\int dy_0 e^{-i(p_0 - \epsilon_n)y_0} = 2\pi \delta(p_0 - \epsilon_n), \tag{5.254}$$

podemos reescrever novamente a função de equilíbrio como:

$$\begin{aligned}
 f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{eB} \int dp_0 \, 2\pi \\
 &\times \left\{ \frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \frac{\delta(p_0 - \epsilon_n)}{1 + e^{\beta(\epsilon_n - \tilde{\mu})}} \right. \\
 &\times \int dy_1 \, e^{ip_1 y_1} v_{n-1}(\xi_+^{(+)}) v_{n-1}(\xi_-^{(+)}) + v_n(\xi_+^{(+)}) v_n(\xi_-^{(+)}) \\
 &+ \frac{-\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \frac{\delta(p_0 + \epsilon_n)}{1 + e^{\beta(\epsilon_n + \tilde{\mu})}} \\
 &\times \left. \int dy_1 \, e^{ip_1 y_1} v_{n-1}(\xi_+^{(-)}) v_{n-1}(\xi_-^{(-)}) + v_n(\xi_+^{(-)}) v_n(\xi_-^{(-)}) \right\}. \quad (5.255)
 \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 I &= \int dy_1 \, e^{ip_1 y_1} v_n(\xi_+^{(+)}) v_n(\xi_-^{(+)}) = \int dy_1 \, e^{ip_1 y_1} \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \\
 &\times e^{-\frac{eB}{2}(-\frac{p_2}{eB} + \frac{y_1}{2})^2 - \frac{eB}{2}(-\frac{p_2}{eB} - \frac{y_1}{2})^2} \\
 &\times H_n \left[\sqrt{eB}(-\frac{p_2}{eB} + \frac{y_1}{2}) \right] H_n \left[\sqrt{eB}(-\frac{p_2}{eB} - \frac{y_1}{2}) \right]. \quad (5.256)
 \end{aligned}$$

Definindo $v = \frac{\sqrt{eB}}{2} y$, a integral pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \frac{2}{\sqrt{eB}} \int_{-\infty}^{\infty} dv \, e^{\frac{2ip_1}{\sqrt{eB}} v} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{\sqrt{eB}} + v \right)^2 - \left(\frac{p_1}{\sqrt{eB}} - v \right)^2} \\
 &\times H_n \left(-\frac{p_2}{\sqrt{eB}} + v \right) H_n \left(-\frac{p_2}{\sqrt{eB}} - v \right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{eB}} (-1)^n e^{-w^2} L_n(2w^2), \quad (5.257)
 \end{aligned}$$

onde:

$$w = \frac{p_1^2 + p_2^2}{eB}. \quad (5.258)$$

Substituindo na equação para a função de equilíbrio e integrando em p_0 , obtemos:

$$\begin{aligned}
f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) &= \sum_{n=0}^{\infty} 4\pi \\
&\left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_n - \hat{\mu})}} \frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} [L_{n-1}(2w^2)(-1)^{n-1} + L_n(2w^2)(-1)^n] \right. \\
&\left. - \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_n + \hat{\mu})}} \frac{-\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} [L_{n-1}(2w^2)(-1)^{n-1} + L_n(2w^2)(-1)^n] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.259}$$

Para normalizar, temos que fazer $f_{eq} \rightarrow \frac{f_{eq}}{(2\pi)^4}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_0 - \hat{\mu})}} \frac{\epsilon_0 + M^*}{2\epsilon_0} L_0(2w^2) e^{-w^2} \\
&+ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + e^{\beta(\epsilon_n - \hat{\mu})}} \frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \\
&\times [L_n(2w^2) - L_{n-1}(2w^2)] e^{-w^2} \\
&- \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_0 + \hat{\mu})}} \frac{-\epsilon_0 + M^*}{2\epsilon_0} L_0(2w^2) e^{-w^2} \\
&- \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + e^{\beta(\epsilon_n + \hat{\mu})}} \frac{-\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} \\
&\times [L_n(2w^2) - L_{n-1}(2w^2)] e^{-w^2}.
\end{aligned} \tag{5.260}$$

No limite de temperaturas baixas, $T \rightarrow 0$, temos:

$$\frac{(-1)^n}{1 + e^{\beta(\epsilon_n - \hat{\mu})}} \rightarrow \theta(\hat{\mu} - \epsilon_n), \tag{5.261}$$

$$\frac{(-1)^n}{1 + e^{\beta(\epsilon_n + \hat{\mu})}} \rightarrow 0, \tag{5.262}$$

e então:

$$\begin{aligned}
f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) &\rightarrow \frac{2}{(2\pi)^3} \theta(E_F - \epsilon_0) \frac{\epsilon_0 + M^*}{2\epsilon_0} L_0(2w^2) e^{-w^2} \\
&+ \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \theta(E_F - \epsilon_n) \frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} (-1)^n \\
&\times [L_n(2w^2) - L_{n-1}(2w^2)] e^{-w^2}
\end{aligned} \tag{5.263}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
N_p &= \int d^3x d^3p f_{eq}(t, \vec{x}, \vec{p}) = V \int d^3p \frac{2e^{-w^2}}{(2\pi)^3} \\
&\times \left\{ \theta(E_F - \epsilon_0) L_0(2w^2) \frac{\epsilon_0 + M^*}{2\epsilon_0} \right. \\
&+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \theta(E_F - \epsilon_n) (-1)^n \frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} [L_n(2w^2) - L_{n-1}(2w^2)] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.264}$$

Realizando a mudança de variáveis:

$$u = w^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{eB} = \frac{p_{\perp}^2}{eB}, \tag{5.265}$$

em coordenadas cilíndricas:

$$\int d^3p = \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dp_{\perp}^2, \tag{5.266}$$

logo,

$$\begin{aligned}
N_p &= \frac{4\pi V}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dp_3 \int_0^{\infty} du eB e^{-u} \\
&\times \left\{ \theta(E_F - \epsilon_0) L_0(2u) \frac{\epsilon_0 + M^*}{2\epsilon_0} \right. \\
&+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \theta(E_F - \epsilon_n) (-1)^n \frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} [L_n(2u) - L_{n-1}(2u)] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.267}$$

A função θ de Heaviside implica em realizar um corte em $\epsilon_n = E_F$, a energia de Fermi, ou, o que é equivalente ser dito, um corte em $p_3^2 = E_F^2 - M^{*2} - 2eBn$. Usando a expressão para a função de Lindhard:

$$\int_0^\infty du L_n(2u)e^{-u} = (-1)^n, \quad (5.268)$$

temos que:

$$\begin{aligned} \rho_p &= \frac{N_p}{V} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} eB \left\{ \int_0^\infty dp_3 \theta(E_F - \epsilon_0) \frac{\epsilon_0 + M^*}{2\epsilon_0} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \theta(E_F - \epsilon_n) \frac{\epsilon_n + M^*}{2\epsilon_n} [(-1)^n - (-1)^{n-1}] \right\}. \quad (5.269) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} eB \frac{E_F + M^*}{2\epsilon_F} \left[p_F(0) + 2 \sum_{n=1}^{n_{max}} p_F(n) \right], \end{aligned}$$

onde $p_F(n) = \sqrt{\epsilon_F^2 - M^{*2} - 2eBn}$ é o momento de Fermi, e n_{max} é o maior número inteiro tal que $p_F(n_{max}) \geq 0$, ou seja, o maior nível de Landau que pode ser ocupado.

5.6 PERTURBAÇÕES E RELAÇÃO DE DISPERSÃO

Agora vamos obter as relações de dispersão para a matéria npe na presença de um campo magnético forte. Partimos da equação de Vlasov generalizada que obtivemos anteriormente:

$$\partial_t f_{i\pm} \pm \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f_{i\pm} + \left(\vec{E}_{(i)} \pm \vec{v} \times \vec{B}_{(i)} \right) \cdot \vec{\nabla}_p f_{i\pm} = 0, \quad (5.270)$$

onde:

$$\vec{E}_{(i)} = -\partial_t \vec{\mathcal{V}}_{(i)} - \vec{\nabla}_x \mathcal{V}_{(i)0} \mp \frac{M^*}{E_p} \vec{\nabla}_x M^*, \quad (5.271)$$

$$\vec{B}_{(i)} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{V}}_{(i)}, \quad (5.272)$$

com $i = n, p, e$. Vamos considerar pequenas oscilações em relação ao equilíbrio geradas por perturbações da função de distribuição:

$$f_{i\pm}(t, \vec{x}, \vec{p}) = f_{0i\pm}(t, \vec{x}, \vec{p}) + \delta f_{i\pm}, \quad (5.273)$$

As perturbações também gerarão alterações nos campos, portanto escreveremos estes como segue:

$$\phi = \phi^{(0)} + \delta\phi, \quad (5.274)$$

$$V_0 = V_0^{(0)} + \delta V_0, \quad V_i = V_i^{(0)} + \delta V_i, \quad (5.275)$$

$$b_0 = b_0^{(0)} + \delta b_0, \quad b_i = b_i^{(0)} + \delta b_i, \quad (5.276)$$

$$A_0 = A_0^{(0)} + \delta A_0, \quad A_i = A_i^{(0)} + \delta A_i. \quad (5.277)$$

Vamos considerar um sistema homogêneo infinito, portanto com invariância rotacional no equilíbrio, o que significa que temos:

$$V_i^{(0)} = b_i^{(0)} = 0 \quad (5.278)$$

e

$$A^{(0)\mu} = (0, \vec{A}), \quad (5.279)$$

pois o sistema se encontra na presença do campo magnético externo. Com as definições acima, temos:

$$\mathcal{V}_i^\mu = \mathcal{V}_i^{(0)\mu} + \delta\mathcal{V}_i^\mu, \quad (5.280)$$

$$\mathcal{V}_i^{(0)\mu} = (\mathcal{V}_i^{(0)0}, Q_i \vec{A}), \quad (5.281)$$

onde Q_i é a carga da partícula: e para prótons, $-e$ para elétrons e 0 para nêutrons. Vamos obter as relações de dispersão a partir da análise das correntes:

$$j_i^\mu(x) \equiv \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu (f_{i+} - f_{i-}). \quad (5.282)$$

A corrente assim definida satisfaz a equação de continuidade:

$$\partial_\mu j_i^\mu(x) = 0. \quad (5.283)$$

Com a perturbação na função de distribuição, também a corrente pode ser escrita como uma parte correspondente ao equilíbrio mais a perturbação:

$$j_i^\mu(x) = j_i^{(0)\mu}(x) + \delta j_i^\mu, \quad (5.284)$$

onde:

$$j_i^{(0)\mu}(x) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu (f_{0i+} - f_{0i-}), \quad (5.285)$$

$$\delta j_i^\mu = \delta j_{i+}^\mu - \delta j_{i-}^\mu, \quad (5.286)$$

com:

$$\delta j_{i\pm}^\mu = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \delta f_{i\pm} \quad (5.287)$$

para $\mu = 0$ e:

$$\delta j_{i\pm}^\mu = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p^{(0)}} p^\mu \delta f_{i\pm} \quad (5.288)$$

para $\mu = 1, 2, 3$, de forma que:

$$\delta j_i^\mu = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p^{(0)}} p^\mu (\delta f_{i+} - \delta f_{i-}). \quad (5.289)$$

Para obter esta equação, notamos que:

$$\delta j_{i\pm}^0 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p p^\mu (f_{0i+} + \delta f_{i+} - f_{0i-} - \delta f_{i-}), \quad (5.290)$$

$$\delta j_i^k = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^k}{\sqrt{p^2 + [m_N - g_s(\phi + \delta\phi)]^2}} (f_{0i+} + \delta f_{i+} - f_{0i-} - \delta f_{i-}), \quad (5.291)$$

e também que:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + [m_N - g_s(\phi + \delta\phi)]^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{p^2 + M^{*(0)2}}} + \frac{g_s M^{*(0)}}{[p^2 + M^{*(0)2}]^{\frac{3}{2}}} \delta\phi, \quad (5.292)$$

Agora:

$$\int d^3p \frac{p^k}{[p^2 + M^{*(0)2}]^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad (5.293)$$

logo nos reduzimos à equação (5.289). No caso da densidade escalar, usando as equações para as componentes da função de Wigner, podemos escrever:

$$f_{3i\pm} = \pm \frac{M^*}{E_p} f_{i\pm}, \quad (5.294)$$

$$\rho_{si} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p} M^*(f_{i+} + f_{i-}). \quad (5.295)$$

Com as perturbações, temos:

$$\begin{aligned} \rho_{si} &= \rho_{si}^{(0)} + \delta\rho_{si} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p [m_N - g_s(\phi + \delta\phi)]}{\sqrt{p^2 + [m_N - g_s(\phi + \delta\phi)]^2}} (f_{0i+} + \delta f_{i+} + f_{0i-} + \delta f_{i-}) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \left[\frac{M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} - \frac{g_s p^2}{E_p^{(0)3}} \delta\phi \right] (f_{0i+} + \delta f_{i+} + f_{0i-} + \delta f_{i-}), \end{aligned} \quad (5.296)$$

ou seja,

$$\delta\rho_{si} = \delta\tilde{\rho}_{si} + g_s d\rho_{si}^{(0)} \delta\phi, \quad (5.297)$$

com:

$$\delta\tilde{\rho}_{si} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} (\delta f_{i+} + \delta f_{i-}) \equiv \delta\tilde{\rho}_{si+} + \delta\tilde{\rho}_{si-}, \quad (5.298)$$

$$d\rho_{si}^{(0)} = -\frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^2}{E_p^{(0)3}} (f_{0i+} + f_{0i-}). \quad (5.299)$$

Para obtermos as relações de dispersão, vamos calcular δj_i^μ a partir das equações (5.287) e (5.288) usando a equação de Vlasov para o cálculo de $\delta f_{i\pm}$. Substituindo $f_{i\pm} = f_{0i\pm} + \delta f_{i\pm}$ na equação de Vlasov, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \partial_t(f_{0i\pm} + \delta f_{i\pm}) \pm \frac{\vec{p}}{E_p} \cdot \vec{\nabla}_x(f_{0i\pm} + \delta f_{i\pm}) \\
& + \left[-\partial_t(\vec{\mathcal{V}}_i^{(0)} + \delta \vec{\mathcal{V}}_i) - \vec{\nabla}_x(\mathcal{V}_{i0}^{(0)} + \delta \mathcal{V}_{i0}) \right. \\
& \mp \frac{[m_N - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi)]}{\sqrt{p^2 + [m_N - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi)]^2}} \vec{\nabla}_x[m_N - g_s(\phi^{(0)} + \delta\phi)] \\
& \left. \pm \frac{\vec{p}}{E_p} \times \vec{\nabla}_x \times (\vec{\mathcal{V}}_i^{(0)} + \delta \vec{\mathcal{V}}_i) \right] \cdot \vec{\nabla}_p(f_{0i\pm} + \delta f_{i\pm}) = 0.
\end{aligned} \tag{5.300}$$

Mantendo apenas termos de primeira ordem em $\delta f_{i\pm}$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
& \partial_t \delta f_{i\pm} \pm \frac{\vec{p}}{E_p^{(0)}} \cdot \vec{\nabla}_x \delta f_{i\pm} \pm \frac{\vec{p}}{E_p^{(0)}} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}_i^{(0)}) \cdot \vec{\nabla}_p \delta f_{i\pm} \\
& - \left[\pm \frac{\vec{p}}{E_p^{(0)}} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}_i^{(0)}) \pm \frac{\vec{p}}{E_p^{(0)}} \times (\vec{\nabla}_x \times \delta \vec{\mathcal{V}}_i) \pm g_s \frac{M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \vec{\nabla}_x \delta \phi \right. \\
& \left. - \partial_t \delta \vec{\mathcal{V}}_i - \vec{\nabla}_x \delta \mathcal{V}_{i0} \right] \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} = 0.
\end{aligned} \tag{5.301}$$

Para $\vec{B} = 0$,

$$f_{0i} = \theta(p_{Fi}^2 - p^2), \quad T = 0, \tag{5.302}$$

$$f_{0i\pm} = \frac{1}{1 + e^{\beta(E_p^{(0)} \mp \mathcal{V}_i)}}, \quad T \neq 0, \tag{5.303}$$

E para $\vec{B} \neq 0$, temos as equações obtidas na seção anterior. Para utilizá-las, vamos primeiro escrever $\vec{\nabla}_p$ em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}_p = \hat{e}_{p\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} + \hat{e}_\phi \frac{1}{p_\perp} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial p_\parallel}. \tag{5.304}$$

A partir das definições mais acima, podemos escrever:

$$\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}_i^{(0)} = Q_i \vec{\nabla}_x \times \vec{A} = Q_i \vec{B}, \tag{5.305}$$

$$\begin{aligned}
\vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}_i^{(0)}) \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} &= Q_i(\vec{p} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} \\
&\approx Q_i \hat{e}_\phi \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} = 0,
\end{aligned} \tag{5.306}$$

pois $\frac{\partial}{\partial \phi} f_{0i\pm} = 0$. Também podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\vec{p} \times (\vec{\nabla}_x \times \vec{\mathcal{V}}_i^{(0)}) \cdot \vec{\nabla}_p f_{i\pm} &= Q_i(\vec{p} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_p f_{i\pm} \\
&= Q_i[(p_\perp \hat{e}_\perp + p_\parallel \hat{e}_3) \times (B \hat{e}_3)] \cdot \vec{\nabla}_p f_{i\pm} = -Q_i B p_\perp \hat{e}_\perp \cdot \vec{\nabla}_p f_{i\pm} \\
&= -Q_i B \frac{\partial}{\partial \phi} f_{i\pm}.
\end{aligned} \tag{5.307}$$

Portanto, podemos escrever a equação de Vlasov como:

$$\begin{aligned}
\partial_t \delta f_{i\pm} \pm \frac{\vec{p}}{E_p^{(0)}} \cdot \vec{\nabla}_x f_{i\pm} \mp \frac{Q_i B}{E_p^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \phi} f_{i\pm} \\
+ \left[\pm \frac{\vec{p}}{E_p^{(0)}} \times (\vec{\nabla}_x \times \delta \vec{\mathcal{V}}_i) \pm \frac{g_s M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \vec{\nabla}_x \delta \phi \right. \\
\left. - \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{\mathcal{V}}_i - \vec{\nabla}_x \times \delta \mathcal{V}_{i0} \right] \\
\cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} = 0.
\end{aligned} \tag{5.308}$$

Notando que a equação continua válida para o caso do nêutron, bastando fazer $Q_i = 0$. Para obtermos daí as relações de dispersão, consideraremos a transformada de Fourier:

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta f_{i\pm}(t, \vec{x}, \vec{p}) \\ \delta \phi(t, \vec{x}) \\ \delta \mathcal{V}_i^\mu(t, \vec{x}) \end{array} \right\} = \int d^3 q \, d\omega \left\{ \begin{array}{c} \delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}) \\ \delta \phi(\omega, \vec{q}) \\ \delta \mathcal{V}_i^\mu(\omega, \vec{q}) \end{array} \right\} e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})}. \tag{5.309}$$

Notando que:

$$\begin{aligned}
\vec{p} \times \left[\vec{\nabla}_x \times \left(\delta \vec{\mathcal{V}}_i(\omega, \vec{q}) e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})} \right) \right] \\
= -i \left[\vec{p} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}}_i \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{q} \delta \vec{\mathcal{V}}_i \right] e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})},
\end{aligned} \tag{5.310}$$

e substituindo a transformada de Fourier na equação de Vlasov, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & i \left(\omega \mp \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_p^{(0)}} \right) \delta f_{i\pm} \mp \frac{Q_i B}{E_p^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \phi} f_{i\pm} \\
 & = i \left[\left(\omega \mp \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_p^{(0)}} \right) \delta \vec{\mathcal{V}}_i \right. \\
 & \quad \left. - \left(\delta \mathcal{V}_{i0} \mp \frac{\vec{p} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}}_i}{E_p^{(0)}} \mp \frac{M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \delta \phi \right) \vec{q} \right] \\
 & \quad \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm}.
 \end{aligned} \tag{5.311}$$

Notando que temos uma dependência explícita no ângulo ϕ , o que tornará mais difícil a resolução da equação acima. Para resolver este problema, vamos utilizar a técnica descrita em (KELLY, 1964), com o referencial:

$$\vec{B} = B \hat{e}_3, \tag{5.312}$$

$$\vec{q} = q_{\perp} \hat{e}_x + q_{\parallel} \hat{e}_3 = (q_{\perp}, 0, q_{\parallel}), \tag{5.313}$$

$$\vec{p} = p_{\perp} \hat{e}_{\perp} + p_{\parallel} \hat{e}_3 = (p_{\perp} \cos \phi, p_{\perp} \sin \phi, p_{\parallel}), \tag{5.314}$$

com \vec{q} fixo e arbitrário, e o referencial escolhido de tal maneira que \vec{q} esteja no plano x-z, sem perda de generalidade. Vamos procurar, então, separar o ângulo ϕ em $\delta f_{i\pm}$, isto é:

$$\delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(\omega, \vec{q}, p_{\perp}, p_{\parallel}) e^{im\phi}. \tag{5.315}$$

Por conveniência, vamos utilizar a transformada de Oberman-Ron (KELLY, 1964) para realizar a separação angular. Para uma função arbitrária $G(\omega, \vec{q}, \vec{p}) = G(\omega, \vec{q}, p_{\perp}, \phi, p_{\parallel})$ podemos escrever:

$$G(\omega, \vec{q}, \vec{p}) = e^{ib \sin \phi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\phi} J_m(b) G^{(m)}(\omega, \vec{q}, p_{\perp}, p_{\parallel}), \tag{5.316}$$

e a transformada inversa:

$$G^{(m)}(\omega, \vec{q}, p_{\perp}, p_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi J_m(b)} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-ibsen\phi} e^{im\phi} G(\omega, \vec{q}, \vec{p}). \quad (5.317)$$

Vamos usar a notação:

$$\delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}) = e^{ibsen\phi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\phi} J_m(b) \delta f_{i\pm}^{(m)}(\omega, \vec{q}, p_{\perp}, p_{\parallel}). \quad (5.318)$$

Substituindo esta expressão na equação de Vlasov, e por conveniência escolhendo:

$$b = -\frac{q_{\perp} p_{\perp}}{Q_i B}, \quad (5.319)$$

temos:

$$\begin{aligned} & e^{ibsen\phi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i e^{-im\phi} \left[\omega \mp \left(\frac{q_{\perp} p_{\perp} \cos\phi}{E_p^{(0)}} + \frac{q_{\parallel} p_{\parallel}}{E_p^{(0)}} \right) \right. \\ & \left. \mp \frac{Q_i B}{E_p^{(0)}} (m + b \cos\phi) \right] J_m(b) \delta f_{i\pm}^{(m)} \\ & = i \left[\left(\omega \mp \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_p^{(0)}} \right) \delta \vec{\mathcal{V}}_i - \left(\delta \mathcal{V}_{i0} \mp \frac{\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{V}}_i}{E_p^{(0)}} - \frac{g_s M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \delta\phi \right) \vec{q} \right] \\ & \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm}. \end{aligned} \quad (5.320)$$

Agora, integramos a equação acima em ϕ , multiplicando por:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(bsen\phi - k\phi)}. \quad (5.321)$$

Usaremos a propriedade:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(bsen\phi - k\phi)} e^{ibsen\phi} e^{-im\phi} = \delta_{mk} \quad (5.322)$$

para obter:

$$\begin{aligned}
& \left(\omega \mp \frac{p_{\parallel} q_{\parallel}}{E_p^{(0)}} \mp \frac{Q_i B}{E_p^{(0)}} k \right) J_k(b) \delta f_{i\pm}^{(k)}(\omega, \vec{q}, p_{\perp}, p_{\parallel}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(b \sin \phi - k\phi)} \\
&\cdot \left[\omega \delta \vec{\mathcal{V}}_i - \left(\delta \mathcal{V}_{i0} \mp \frac{g_s M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \delta \phi \right) \vec{q} \right. \\
&\mp \left. \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{E_p^{(0)}} \delta \vec{\mathcal{V}}_i - \frac{\vec{p} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}}_i}{E_p^{(0)}} \vec{q} \right) \right] \\
&\cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm}.
\end{aligned} \tag{5.323}$$

Na expressão acima, podemos realizar as integrais em ϕ :

$$\begin{aligned}
& \delta \vec{\mathcal{V}}_i \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} = (\delta \mathcal{V}_{ix} \hat{e}_x + \delta \mathcal{V}_{iy} \hat{e}_y + \delta \mathcal{V}_{iz} \hat{e}_z) \\
&\cdot \left(\hat{e}_{\perp} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{0i\pm} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_{0i\pm} \right) \\
&= \cos \phi \delta \mathcal{V}_{ix} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{0i\pm} + \sin \phi \delta \mathcal{V}_{iy} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{0i\pm} + \delta \mathcal{V}_{iz} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_{0i\pm}.
\end{aligned} \tag{5.324}$$

Definindo:

$$D_{\perp\pm}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{0i\pm}, \tag{5.325}$$

$$D_{\parallel\pm}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_{0i\pm}, \tag{5.326}$$

temos:

$$\delta \vec{\mathcal{V}}_i \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} = \cos \phi \delta \mathcal{V}_{ix} D_{\perp\pm}^{(i)} + \sin \phi \delta \mathcal{V}_{iy} D_{\perp\pm}^{(i)} + \delta \mathcal{V}_{iz} D_{\parallel\pm}^{(i)}, \tag{5.327}$$

$$\begin{aligned}
& \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} = (q_{\perp} \hat{e}_x + q_{\parallel} \hat{e}_z) \cdot (\hat{e}_{\perp} D_{\perp\pm}^{(i)} + \hat{e}_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)}) \\
&= q_{\perp} \cos \phi D_{\perp\pm}^{(i)} + q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)},
\end{aligned} \tag{5.328}$$

$$\begin{aligned}
& \vec{p} \cdot \vec{q} \delta \vec{\mathcal{V}}_i \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} - (\vec{p} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}}_i) \vec{q} \cdot \vec{\nabla}_p f_{0i\pm} \\
&= (p_{\perp} q_{\perp} \cos \phi + p_{\parallel} q_{\parallel}) (\cos \phi \delta \mathcal{V}_{ix} D_{\perp\pm}^{(i)} + \sin \phi \delta \mathcal{V}_{iy} D_{\perp\pm}^{(i)} + \delta \mathcal{V}_{iz} D_{\parallel\pm}^{(i)}) \\
&- (p_{\perp} \cos \phi \delta \mathcal{V}_{ix} + p_{\perp} \sin \phi \delta \mathcal{V}_{iy} + p_{\parallel} \delta \mathcal{V}_{iz}) (q_{\perp} \cos \phi D_{\perp\pm}^{(i)} + q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)}) \\
&= (p_{\perp} q_{\perp} \cos^2 \phi D_{\perp\pm}^{(i)} + p_{\parallel} q_{\parallel} \cos \phi D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\perp} \cos^2 \phi D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} \cos \phi D_{\parallel\pm}^{(i)}) \delta \mathcal{V}_{ix} \\
&+ (p_{\perp} q_{\perp} \cos \phi \sin \phi D_{\perp\pm}^{(i)} + p_{\parallel} q_{\parallel} \sin \phi D_{\perp\pm}^{(i)} \\
&- p_{\perp} q_{\perp} \cos \phi \sin \phi D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} \sin \phi D_{\parallel\pm}^{(i)}) \delta \mathcal{V}_{iy} \\
&+ (p_{\perp} q_{\perp} \cos \phi D_{\perp\pm}^{(i)} + p_{\parallel} q_{\parallel} \cos \phi D_{\parallel\pm}^{(i)} - p_{\parallel} q_{\perp} \cos \phi D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\parallel} q_{\parallel} \cos \phi D_{\parallel\pm}^{(i)}) \delta \mathcal{V}_{iz} \\
&= (p_{\parallel} q_{\parallel} D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)}) \cos \phi \delta \mathcal{V}_{ix} + (p_{\parallel} q_{\parallel} D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)}) \sin \phi \delta \mathcal{V}_{iy} \\
&+ (p_{\perp} q_{\perp} D_{\parallel\pm}^{(i)} - p_{\parallel} q_{\perp} D_{\perp\pm}^{(i)}) \cos \phi \delta \mathcal{V}_{iz}.
\end{aligned} \tag{5.329}$$

A integração angular da equação (5.323) pode ser realizada utilizando os resultados acima e as integrais a seguir:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(b \sin \phi - k\phi)} = J_k(b), \tag{5.330}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(b \sin \phi - k\phi)} \sin \phi = i \frac{dJ_k}{dx} \Big|_{x=b} = i J'_k(b), \tag{5.331}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(b \sin \phi - k\phi)} \cos \phi = \frac{k}{b} J_k(b). \tag{5.332}$$

Usaremos estes resultados para fazer a substituição:

$$\begin{aligned}
& \left(\omega \mp \frac{P_{\parallel} q_{\parallel}}{E_p^{(0)}} \mp \frac{Q_i B}{E_p^{(0)}} k \right) J_k(b) \delta f_{i\pm}^{(k)}(\omega, \vec{q}, p_{\perp}, p_{\parallel}) \\
&= \left\{ \omega \left(\frac{k}{b} J_k(b) D_{\perp\pm}^{(i)} \delta \mathcal{V}_{ix} + i J'_k(b) D_{\perp\pm}^{(i)} \delta \mathcal{V}_{iy} + J_k(b) D_{\parallel\pm}^{(i)} \delta \mathcal{V}_{iz} \right) \right. \\
&\mp \frac{1}{E_p^{(0)}} \left[\left(p_{\parallel} q_{\parallel} D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)} \right) \frac{k}{b} J_k(b) \delta \mathcal{V}_{ix} \right. \\
&+ \left(p_{\parallel} q_{\parallel} D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)} \right) i J'_k(b) \delta \mathcal{V}_{iy} \\
&+ \left. \left(p_{\perp} q_{\perp} D_{\parallel\pm}^{(i)} - p_{\parallel} q_{\perp} D_{\perp\pm}^{(i)} \right) \frac{k}{b} J_k(b) \delta \mathcal{V}_{iz} \right] \\
&\left. - \left(\delta \mathcal{V}_{i0} \mp \frac{g_s M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \delta \phi \right) \left(q_{\perp} D_{\perp\pm}^{(i)} \frac{k}{b} J_k(b) + q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)} J_k(b) \right) \right\}. \tag{5.333}
\end{aligned}$$

Com a expressão acima, reconstruímos $\delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p})$ usando a equação (5.318):

$$\begin{aligned}
\delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}) &= e^{i b s e n \phi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i m \phi} \\
&\left\{ \frac{m}{b} J_m(b) \left[\omega D_{\perp\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_{\parallel} q_{\parallel} D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)}) \right] \delta \mathcal{V}_{ix} \right. \\
&+ i J'_m(b) \left[\omega D_{\perp\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_{\parallel} q_{\parallel} D_{\perp\pm}^{(i)} - p_{\perp} q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)}) \right] \delta \mathcal{V}_{iy} \\
&+ J_m(b) \left[\omega D_{\parallel\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_{\perp} q_{\perp} D_{\parallel\pm}^{(i)} - p_{\parallel} q_{\perp} D_{\perp\pm}^{(i)}) \frac{m}{b} \right] \delta \mathcal{V}_{iz} \\
&\left. - J_m(b) \left[q_{\perp} D_{\perp\pm}^{(i)} \frac{m}{b} + q_{\parallel} D_{\parallel\pm}^{(i)} \right] \left(\delta \mathcal{V}_{i0} \mp \frac{g_s M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \delta \phi \right) \right\} \\
&\times \left[\omega \mp \frac{p_{\parallel} q_{\parallel}}{E_p^{(0)}} \mp \frac{Q_i B}{E_p^{(0)}} m \right]^{-1}. \tag{5.334}
\end{aligned}$$

Agora consideramos a transformada de Fourier das perturbações das correntes:

$$\delta j_{i\pm}^\mu(t, \vec{x}) = \int d\omega d\vec{q} \delta j_{i\pm}^\mu(\omega, \vec{q}) e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})}, \quad (5.335)$$

e usando as equações (5.287), (5.288) e (5.309), obtemos:

$$\delta j_{i\pm}^\mu(\omega, \vec{q}) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{E_p^{(0)}} p^\mu \delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}). \quad (5.336)$$

A equação de continuidade é:

$$\partial_\mu \delta j_i^\mu(t, \vec{x}) = \partial_\mu \left[\delta j_i^{(0)\mu} + \delta j_i \right] = 0, \quad (5.337)$$

e notemos que:

$$\partial_\mu \delta j_i^\mu = 0 \Rightarrow \omega \delta j_i^0 + \vec{\nabla}_x \delta \vec{j}_i = 0, \quad (5.338)$$

Uma vez que estamos interessados em pequenas perturbações das densidades, vamos considerar o caso $\mu = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \delta \rho_{i\pm} &\equiv \delta j_{i\pm}^0(\omega, \vec{q}) = \int d^3 p \delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}) \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_0^\infty dp_\parallel \int_0^{2\pi} d\phi \delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}). \end{aligned} \quad (5.339)$$

Substituindo a expressão que obtivemos para $\delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p})$ e usando que:

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(b \sin \phi - m \phi)} = 2\pi J_m(b), \quad (5.340)$$

e definindo a função $S_{i\pm}[x]$ tal que:

$$S_{i\pm}[x] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{dp_\perp p_\perp dp_\parallel [x]}{\omega \mp \frac{p_\parallel q_\parallel}{E_p^{(0)}} \mp \frac{Q_i B}{E_p^{(0)}} m}, \quad (5.341)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta\rho_{i\pm}(\omega, \vec{q}) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_0^\infty dp_\parallel \int_0^{2\pi} d\phi \delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}) \\
&= \left\{ S_{i\pm} \left[\frac{m}{b} J_m^2(b) \left[\omega D_{\perp\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_\parallel q_\parallel D_{\perp\pm}^{(i)} - p_\perp q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)}) \right] \right] \delta\mathcal{V}_{ix} \right. \\
&\quad + S_{i\pm} \left[iJ_m(b) J'_m(b) \left[\omega D_{\perp\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_\parallel q_\parallel D_{\perp\pm}^{(i)} - p_\perp q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)}) \right] \right] \delta\mathcal{V}_{iy} \\
&\quad + S_{i\pm} \left[J_m^2(b) \left[\omega D_{\parallel\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_\perp q_\perp D_{\parallel\pm}^{(i)} - p_\parallel q_\perp D_{\perp\pm}^{(i)}) \frac{m}{b} \right] \right] \delta\mathcal{V}_{iz} \\
&\quad - S_{i\pm} \left[J_m^2(b) \left(q_\perp \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} + q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)} \right) \right] \delta\mathcal{V}_{i0} \\
&\quad \left. \pm S_{i\pm} \left[\frac{J_m^2(b)}{E_p^{(0)}} \left(q_\perp \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} + q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)} \right) \right] g_s M^{*(0)} \delta\phi \right\}.
\end{aligned} \tag{5.342}$$

A última expressão relaciona a densidade de partículas $\rho_{i\pm}$ com os campos $(V^\mu, b^\mu, A^\mu, \phi)$. A partir das equações de movimento, vamos substituir os campos pelas densidades e, então, obter as equações de dispersão. Ainda precisamos de uma equação que relacione a densidade escalar $\tilde{\rho}_{si\pm}$ com os campos. Da equação (5.297), temos que:

$$\tilde{\rho}_{si\pm} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \delta f_{i\pm}. \tag{5.343}$$

Comparando com a equação (5.339), obtemos por analogia, de modo trivial, a expressão para $\tilde{\rho}_{si\pm}$, bastando incluir o termo $\frac{M^{*(0)}}{E_p^{(0)}}$ no integrando da equação (5.342), ou, de maneira equivalente, nas funções $S_{i\pm}[x]$. Para completar nossa tarefa, precisamos agora das equações de movimento para as perturbações dos campos, de modo a obter $\delta\mathcal{V}_i^\mu$ e $\delta\phi$. Temos as equações de movimento dos campos não perturbados:

$$\partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi + m_s^2 \phi + \frac{\kappa}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{6} \phi^3 = g_s \rho_s = g_s \sum_{i=p,n} \rho_{si}, \tag{5.344}$$

$$\partial_t^2 V^\mu - \nabla^2 V^\mu + m_v^2 V^\mu = g_v j^\mu = g_v \sum_{i=p,n} j_i^\mu, \tag{5.345}$$

$$\partial_t^2 b^\mu - \nabla^2 b^\mu + m_\rho^2 b^\mu = g_\rho j_3^\mu = g_\rho \sum_{i=p,n} \tau_i j_i^\mu, \quad (5.346)$$

$$\partial_t^2 A^\mu - \nabla^2 A^\mu = e(j_p^\mu - j_e^\mu) = \sum_{i=p,n,e} Q_i j_i^\mu. \quad (5.347)$$

Agora vamos considerar perturbações em relação ao equilíbrio. Para o campo ϕ :

$$\begin{aligned} \partial_t^2(\phi^{(0)} + \delta\phi) - \nabla^2(\phi^{(0)} + \delta\phi) + m_s^2(\phi^{(0)} + \delta\phi) + \frac{\kappa}{2}(\phi^{(0)} + \delta\phi)^2 \\ + \frac{\lambda}{6}(\phi^{(0)} + \delta\phi)^3 = g_s(\rho_s^{(0)} + \delta\rho_s). \end{aligned} \quad (5.348)$$

A expressão até primeira ordem é:

$$\left[\partial_t^2 - \nabla^2 + m_s^2 \phi + \kappa \phi^{(0)} + \frac{\lambda}{2} \phi^{(0)2} \right] \delta\phi = g_s \delta\rho_s, \quad (5.349)$$

onde usamos que $\phi^{(0)}$ é solução da equação de Klein-Gordon com os termos não lineares:

$$m_s^2 \phi^{(0)} + \frac{\kappa}{2} \phi^{(0)2} + \frac{\lambda}{6} \phi^{(0)3} = g_s \rho_s^{(0)}. \quad (5.350)$$

Vamos substituir a equação (5.297) na (5.349) e realizar uma transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \left[-\omega^2 + q^2 + m_s^2 + \kappa \phi^{(0)} + \frac{\lambda}{2} \phi^{(0)2} \right] \delta\phi(\omega, \vec{q}) \\ = g_s \left[\sum_{i=p,n} (\delta\tilde{\rho}_{i+} + \delta\tilde{\rho}_{i-}) + g_s \sum_{i=p,n} d\tilde{\rho}_{si}^{(0)} \delta\phi(\omega, \vec{q}) \right]. \end{aligned} \quad (5.351)$$

Definindo:

$$\tilde{m}_s^2 = m_s^2 + \kappa \phi^{(0)} + \frac{\lambda}{2} \phi^{(0)2} + g_s \sum_{i=p,n} d\tilde{\rho}_{si}^{(0)}, \quad (5.352)$$

obtemos:

$$[-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_s^2] \delta\phi(\omega, \vec{q}) = g_s \sum_{j=p,n} \frac{2M^{*(0)}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p^{(0)}} (\delta f_{j+} + \delta f_{j-}), \quad (5.353)$$

e analogamente,

$$[-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_v^2] \delta V^\mu(\omega, \vec{q}) = g_v \sum_{j=p,n} \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p^{(0)}} p^\mu (\delta f_{j+} - \delta f_{j-}), \quad (5.354)$$

$$[-\omega^2 + q^2 + \tilde{m}_\rho^2] \delta b^\mu(\omega, \vec{q}) = \frac{g_\rho}{2} \sum_{j=p,n} \tau_j \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p^{(0)}} p^\mu (\delta f_{j+} - \delta f_{j-}), \quad (5.355)$$

$$[-\omega^2 + q^2] \delta A^\mu(\omega, \vec{q}) = e \sum_{j=p,e} Q_j \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p^{(0)}} p^\mu (\delta f_{j+} - \delta f_{j-}). \quad (5.356)$$

Usando as definições das perturbações das correntes bariônicas e escalar, podemos reescrever as últimas equações como:

$$\begin{aligned} \delta\phi(\omega, \vec{q}) &= \frac{g_s}{-\omega^2 + \omega_s^2} \sum_{j=p,n} (\delta\tilde{\rho}_{js+} + \delta\tilde{\rho}_{js-}) \\ &= \frac{g_s}{-\omega^2 + -\omega_s^2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj}, \end{aligned} \quad (5.357)$$

$$\begin{aligned} \delta V^\mu(\omega, \vec{q}) &= \frac{g_v}{-\omega^2 + \omega_v^2} \sum_{j=p,n} (\delta j_{j+}^\mu + \delta j_{j-}^\mu) \\ &= \frac{g_v}{-\omega^2 + -\omega_v^2} \sum_{j=p,n} \delta j_j^\mu, \end{aligned} \quad (5.358)$$

$$\begin{aligned}
\delta b^\mu(\omega, \vec{\rho}) &= \frac{\frac{g_\rho}{2}}{-\omega^2 + \omega_\rho^2} \sum_{j=p,n} \tau_j (\delta j_{j+}^\mu + \delta j_{j-}^\mu) \\
&= \frac{\frac{g_v}{2}}{-\omega^2 + \omega_\rho^2} \sum_{j=p,n} \tau_j \delta j_j^\mu,
\end{aligned} \tag{5.359}$$

$$\begin{aligned}
\delta A^\mu(\omega, \vec{q}) &= \frac{1}{-\omega^2 + q^2} \sum_{j=p,e} Q_j (\delta j_{j+}^\mu + \delta j_{j-}^\mu) \\
&= \frac{1}{-\omega^2 + q^2} \sum_{j=p,n} Q_j \delta j_j^\mu,
\end{aligned} \tag{5.360}$$

onde definimos $\omega_s^2 = \tilde{m}_s^2 + q^2$, $\omega_v^2 = m_v^2 + q^2$ e $\omega_\rho^2 = m_\rho^2 + q^2$.

Como $\delta \mathcal{V}_i^\mu$ é dado por:

$$\delta \mathcal{V}_i^\mu = g_v \delta V^\mu + \frac{g_\rho}{2} \tau_i \delta b^\mu + \frac{e}{2} (1 + \tau_i) \delta A^\mu, \tag{5.361}$$

$$\delta \mathcal{V}_e^\mu = -e \delta A^\mu, \tag{5.362}$$

podemos escrever:

$$\delta \mathcal{V}_i^\mu = \sum_{j=p,n} \left[\frac{g_v}{-\omega^2 + \omega_v^2} + \frac{\frac{g_\rho \tau_i \tau_j}{2}}{-\omega^2 + \omega_\rho^2} + \frac{Q_i Q_j}{-\omega^2 + q^2} \right] \delta j_j^\mu + \frac{Q_j Q_e}{-\omega^2 + q^2} \delta j_e^\mu, \tag{5.363}$$

$$\delta \mathcal{V}_e^\mu = \sum_{j=p,e} \frac{Q_e Q_j}{-\omega^2 + q^2} \delta j_j^\mu = \frac{Q_e^2}{-\omega^2 + q^2} \delta j_e^\mu + \frac{Q_e Q_p}{-\omega^2 + q^2} \delta j_p^\mu. \tag{5.364}$$

As equações acima nos dão as perturbações nos campos em função das perturbações nas correntes. Agora, vamos expandir as perturbações em séries. Definindo:

$$D_{ij} \equiv \frac{g_v}{-\omega^2 + \omega_v^2} + \frac{\frac{g_\rho \tau_i \tau_j}{2}}{-\omega^2 + \omega_\rho^2} + \frac{Q_i Q_j}{-\omega^2 + q^2}, \tag{5.365}$$

escrevemos:

$$\delta\phi = \sum_j C_j \delta\tilde{\rho}_{sj}, \quad (5.366)$$

$$\delta\mathcal{V}_i^\mu = \sum_j D_{ij}^\mu \delta j_j^\mu. \quad (5.367)$$

A partir da equação (5.334) e das expansões acima, podemos obter:

$$\delta\tilde{\rho}_{sj} = \sum_{j=p,n} \tilde{C}_j \delta\tilde{\rho}_{sj} + \sum_\mu \sum_{j=n,p,e} D_{ji}^\mu \delta j_i^\mu, \quad (5.368)$$

$$\delta j_j^\mu = \sum_{j=p,n} \tilde{C}_j^\mu \delta\tilde{\rho}_{sj} + \sum_\nu \sum_{j=n,p,e} D_{ji}^{\mu\nu} \delta j_i^\nu. \quad (5.369)$$

O conjunto das equações acima pode ser resolvido em função das variáveis $\delta\tilde{\rho}_{si}$ e δj_i^μ , e com isto, podemos obter as relações de dispersão. Vamos tomar o caminho mais pragmático e obter soluções para casos particulares. Por conveniência, vamos escrever explicitamente $\delta\tilde{\rho}_{si}$, a partir da sua definição, da equação (5.334) e por comparação com a equação (5.342):

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\rho}_{si}(\omega, \vec{q}) &= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_0^\infty dp_\parallel \int_0^{2\pi} d\phi \frac{M^{*(0)}}{E_p^{(0)}} \delta f_{i\pm}(\omega, \vec{q}, \vec{p}) \\ &= \left\{ S_{i\pm} \left[\frac{m}{b} M^{*(0)} J_m^2(b) \left[\omega D_{\perp\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_\parallel q_\parallel D_{\perp\pm}^{(i)} - p_\perp q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)}) \right] \right] \delta\mathcal{V}_{ix} \right. \\ &\quad + S_{i\pm} \left[i M^{*(0)} J_m(b) J'_m(b) \right. \\ &\quad \times \left. \left[\omega D_{\perp\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_\parallel q_\parallel D_{\perp\pm}^{(i)} - p_\perp q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)}) \right] \right] \delta\mathcal{V}_{iy} \\ &\quad + S_{i\pm} \left[M^{*(0)} J_m^2(b) \left[\omega D_{\parallel\pm}^{(i)} \mp \frac{1}{E_p^{(0)}} (p_\perp q_\perp D_{\parallel\pm}^{(i)} - p_\parallel q_\perp D_{\perp\pm}^{(i)}) \frac{m}{b} \right] \right] \delta\mathcal{V}_{iz} \\ &\quad - S_{i\pm} \left[M^{*(0)} J_m^2(b) \left(q_\perp \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} + q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)} \right) \right] \delta\mathcal{V}_{i0} \\ &\quad \left. \pm S_{i\pm} \left[M^{*(0)} \frac{J_m^2(b)}{E_p^{(0)}} \left(q_\perp \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} + q_\parallel D_{\parallel\pm}^{(i)} \right) \right] g_s M^{*(0)} \delta\phi \right\}. \end{aligned} \quad (5.370)$$

5.7 PERTURBAÇÕES LONGITUDINAIS

Vamos considerar o caso particular em que as oscilações da densidade de partículas se dão na direção do campo magnético externo \vec{B} , isto é, na direção z do referencial que escolhemos. Também vamos considerar o regime de baixas temperaturas ($T = 0$). Neste caso, $\vec{q} = q_{\parallel} \hat{e}_3 = q$, e $q_{\perp} = 0$. As perturbações na direção paralela ao campo magnético são geradas pelas perturbações na corrente, $\delta \vec{j}_i = \delta j_i \hat{e}_3$, com $\delta j_{ix} = \delta j_{iy} = 0$. As equações para as perturbações dos campos nos permitem concluir que também $\delta \mathcal{V}_{ix} = \delta \mathcal{V}_{iy} = 0$, e a conservação das correntes, $\partial_{\mu} j_i^{\mu} = 0$ nos dá que $\partial_{\mu} \delta V^{\mu} = \partial_{\mu} \delta b^{\mu} = \partial_{\mu} \delta A^{\mu} = 0$. Fazendo uma transformada de Fourier nestas últimas expressões, temos:

$$\omega \delta \mathcal{V}_i^0 = \vec{q} \cdot \delta \vec{\mathcal{V}}_i. \quad (5.371)$$

No caso de ondas longitudinais:

$$\begin{aligned} \delta \rho_{i\pm}(\omega, \vec{q}) &= S_{i\pm}[J_m^2(0)\omega D_{\parallel\pm}^{(i)}] \delta \mathcal{V}_{iz} \\ &- S_{i\pm}[J_m^2(0)q D_{\parallel\pm}^{(i)}] \delta \mathcal{V}_i^0 \pm S_{i\pm}\left[\frac{1}{E_p^{(0)}} J_m^2(0)q D_{\parallel\pm}^{(i)}\right] g_s M^{*(0)} \delta \phi. \end{aligned} \quad (5.372)$$

$$\text{Como } \delta \mathcal{V}_{iz} = \frac{\omega}{q} \delta \mathcal{V}_i^0,$$

$$\begin{aligned} \delta \rho_{i\pm}(\omega, \vec{q}) &= -q \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) S_{i\pm}[J_m^2(0)\omega D_{\parallel\pm}^{(i)}] \delta \mathcal{V}_i^0 \\ &\pm S_{i\pm}\left[\frac{J_m^2(0)}{E_p^{(0)}} D_{\parallel\pm}^{(i)}\right] q g_s M^{*(0)} \delta \phi. \end{aligned} \quad (5.373)$$

$$\text{Como } J_m(0) = \delta_{m0},$$

$$\begin{aligned} S_{i\pm}[J_m^2(0)\omega D_{\parallel\pm}^{(i)}] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dp_{\perp} p_{\perp} dp_{\parallel}}{\omega \mp \frac{p_{\parallel} q}{E_p^{(0)}} \mp \frac{Q_{iB}}{E_p^{(0)}} m} \delta_{m0} D_{\parallel\pm}^{(i)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int dp_{\perp} p_{\perp} \int dp_{\parallel} \frac{D_{\parallel\pm}^{(i)}}{\omega \mp \frac{p_{\parallel} q}{E_p^{(0)}}}, \end{aligned} \quad (5.374)$$

$$S_{i\pm} \left[\frac{J_m^2(0)}{E_p^{(0)}} \omega D_{\parallel\pm}^{(i)} \right] = \frac{1}{2\pi^2} \int dp_{\perp} p_{\perp} \int \frac{dp_{\parallel}}{E_p^{(0)}} \frac{D_{\parallel\pm}^{(i)}}{\omega \mp \frac{p_{\parallel} q}{E_p^{(0)}}}. \quad (5.375)$$

Vamos definir:

$$\tilde{L}_{i\pm}^{(k)} = \frac{1}{2\pi^2} \int dp_{\perp} p_{\perp} \int \frac{dp_{\parallel}}{E_p^{(k)}} \frac{D_{\parallel\pm}^{(i)}}{\frac{\omega}{q} \mp \frac{p_{\parallel}}{E_p^{(0)}}}. \quad (5.376)$$

Com isto, podemos escrever:

$$\delta\rho_{i\pm}(\omega, \vec{q}) = - \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \tilde{L}_{i\pm}^{(0)} \delta\mathcal{V}_i^0 \pm g_s M^{*(0)} \tilde{L}_{i\pm}^{(1)} \delta\phi. \quad (5.377)$$

De modo análogo, podemos obter, a partir da equação (5.370):

$$\delta\rho_{si\pm}(\omega, \vec{q}) = - \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) M^{*(0)} \tilde{L}_{i\pm}^{(1)} \delta\mathcal{V}_i^0 \pm g_s M^{*(0)2} \tilde{L}_{i\pm}^{(2)} \delta\phi. \quad (5.378)$$

Usando as equações de movimento, obtemos então:

$$\begin{aligned} \delta\rho_i &= \delta\rho_{i+} - \delta\rho_{i-} = \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \left(\tilde{L}_{i+}^{(0)} - \tilde{L}_{i-}^{(0)} \right) \\ &\times \left(\sum_{j=p,n} D_{ij} \delta\rho_j + \frac{Q_i Q_e}{-\omega^2 + q^2} \delta\rho - e \right) \\ &+ g_s M^{*(0)} \left(\tilde{L}_{i+}^{(1)} + \tilde{L}_{i-}^{(1)} \right) \frac{g_s}{-\omega^2 + \omega_s^2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj}, \end{aligned} \quad (5.379)$$

$$\begin{aligned}
\delta\rho_{si} &= \delta\rho_{si+} - \delta\rho_{si-} = \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) M^{*(0)} \left(\tilde{L}_{i+}^{(1)} + \tilde{L}_{i-}^{(1)}\right) \\
&\times \left(\sum_{j=p,n} D_{ij} \delta\rho_j + \frac{Q_i Q_e}{-\omega^2 + q^2} \delta\rho - e\right) \\
&+ g_s M^{*(0)2} \left(\tilde{L}_{i+}^{(2)} - \tilde{L}_{i-}^{(2)}\right) \frac{g_s}{-\omega^2 + \omega_s^2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj}.
\end{aligned} \tag{5.380}$$

A título de teste de consistência para as expressões acima, vamos utilizá-las para calcular o caso mais simples do sistema com campo magnético nulo. Neste caso, teremos:

$$D_{\parallel\pm}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_{0i\pm} \Rightarrow \begin{cases} D_{\parallel+}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \theta(p_{Fi}^2 - p^2) \\ D_{\parallel-}^{(i)} = 0 \end{cases}, \tag{5.381}$$

onde

$$D_{\parallel+}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \theta(p_{Fi}^2 - p^2) = \frac{\partial \theta(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p_{\parallel}} = -2p_{\parallel} \delta(p_{Fi}^2 - p^2), \tag{5.382}$$

com

$$|p_{\parallel}|, |p_{\perp}| < p_{Fi}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\delta(p_{Fi}^2 - p^2) &= \delta(p_{Fi}^2 - p_{\parallel}^2 - p_{\perp}^2) = \delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) - p_{\parallel}\right) \\
&= \delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) + p_{\parallel}\right) \delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) - p_{\parallel}\right) \\
&= \frac{\delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) + p_{\parallel}\right) + \delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) - p_{\parallel}\right)}{2|p_{\parallel}|}
\end{aligned} \tag{5.383}$$

e, portanto,

$$D_{\parallel\pm}^{(i)} \equiv D_{\parallel+}^{(i)} = -\delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) - p_{\parallel}\right) + \delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) + p_{\parallel}\right). \quad (5.384)$$

Substituindo na equação (5.376), obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{i\pm}^{(k)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} dp_{\perp} p_{\perp} \int dp_{\parallel} \frac{1}{E_p^{(0)}} \frac{1}{\left(\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2} + M^{*(0)2}\right)^k} \\ &\quad \times \frac{-\delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) - p_{\parallel}\right) + \delta\left(\left(\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}\right) + p_{\parallel}\right)}{\frac{\omega}{q} - \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2} + M^{*(0)2}}} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{p_{Fi}} dp_{\perp} p_{\perp} \frac{1}{(\epsilon_F^{(0)})^k} \left[\frac{1}{\frac{\omega}{q} - \frac{\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}}{\epsilon_F^{(0)}}} - \frac{1}{\frac{\omega}{q} + \frac{\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}}{E_{Fi}^{(0)}}} \right], \end{aligned} \quad (5.385)$$

onde definimos $E_{Fi}^{(0)} = \sqrt{p_{Fi}^2 + M^{*(0)2}}$. Agora faremos as integrais nos dois termos do lado direito da equação (5.385). Para o primeiro caso, realizamos a mudança de variáveis:

$$x = \frac{\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}}{p_{Fi}} \Rightarrow dx = \frac{-p_{\perp} dp_{\perp}}{\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}} \frac{1}{p_{Fi}} \Rightarrow dp_{\perp} p_{\perp} = -p_{Fi}^2 x dx.$$

No segundo,

$$x = -\frac{\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}}{p_{Fi}} \Rightarrow dx = \frac{p_{\perp} dp_{\perp}}{\sqrt{p_{Fi}^2 - p_{\perp}^2}} \frac{1}{p_{Fi}} \Rightarrow dp_{\perp} p_{\perp} = -p_{Fi}^2 x dx,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{i\pm}^{(k)} &= \frac{p_{Fi}^2}{2\pi^2} \int_1^0 x dx \frac{1}{(\epsilon_{Fi}^{(0)})^k} \frac{1}{\frac{\omega}{q} - \frac{xp_{Fi}}{E_{Fi}^{(0)}}} \\
&\quad - \frac{p_{Fi}^2}{2\pi^2} \int_{-1}^0 x dx \frac{1}{(\epsilon_{Fi}^{(0)})^k} \frac{1}{\frac{\omega}{q} - \frac{xp_{Fi}}{E_{Fi}^{(0)}}} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi}}{(E_{Fi}^{(0)})^{k-1}} \int_{-1}^1 dx \frac{x}{\frac{\omega}{qp_{Fi}/E_{Fi}^{(0)}} - x}.
\end{aligned} \tag{5.386}$$

Usando a definição da função de Lindhard, $L(x)$, dada na equação (5.268):

$$\tilde{L}_{i\pm}^{(k)} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi}}{(E_{Fi}^{(0)})^{k-1}} L(S_i), \tag{5.387}$$

com $S_i = \frac{\omega}{\omega_{0i}}$, e $\omega_{0i} = \frac{qp_{Fi}}{E_{Fi}^{(0)}}$.

Devido ao fato da função delta de Dirac na função de distribuição $\tilde{\rho}_{si}$ se relacionar de maneira trivial com ρ_i , podemos escrever:

$$\tilde{\rho}_{si} \equiv \frac{M^{*(0)}}{E_{Fi}^{(0)}} \delta\rho_i, \tag{5.388}$$

de maneira a escrever a equação (5.379) para este caso como:

$$\begin{aligned}
\delta\rho_i &= \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) \sum_{j=p,n} \left[\left(\frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{\omega^2 - \omega_\rho^2} + \frac{Q_i Q_j}{\omega^2 - q^2} \right) \delta\rho_e \right] \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi^2} \frac{p_{Fi}^2}{p_{Fi}/E_{Fi}^{(0)}} L(S_i) - \frac{g_s^2 + M^{*(0)}}{\omega^2 - \omega_s^2} \sum_{j=p,n} \frac{M^{*(0)}}{E_{Fj}^{(0)}} \frac{1}{2\pi^2} p_{Fi} L(S_i) \delta\rho_j.
\end{aligned} \tag{5.389}$$

Definindo $v_{Fi} = p_{Fi} E_{Fi}^{(0)}$ e $\delta\rho_i = p_{Fi}^2 A_{\omega i}$, podemos comparar a expressão acima com aquela encontrada na referência (BRITO et al., 2006). Vamos explicitar a equivalência:

$$\begin{aligned}
p_{Fi}^2 A_{\omega i} + \sum_{j=p,n} \left[\frac{1}{2\pi^2} \frac{g_s^2 + M^{*(0)}}{\omega^2 - \omega_s^2} \frac{p_{Fi}}{E_{Fj}} \right. \\
- \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fi}^2}{v_{Fi}} \\
- \frac{1}{2\pi^2} \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{\omega^2 - \omega_\rho^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fi}^2}{v_{Fi}} \\
\left. - \frac{1}{2\pi^2} \frac{Q_i Q_j}{\omega^2 - q^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fi}^2}{v_{Fi}} \right] \\
\times L(S_i) p_{Fj}^2 A_{\omega j} \\
- \frac{1}{2\pi^2} \frac{Q_p Q_e}{\omega^2 - q^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fe}^2}{v_{Fe}} = 0,
\end{aligned} \tag{5.390}$$

com $i = p, n$. Definindo:

$$\begin{aligned}
C_s^{ij} &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_s^2 + M^{*(0)}}{\omega^2 - \omega_s^2} \frac{1}{p_{Fi}} p_{Fj} v_{Fj}; \\
C_v^{ij} &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fj}^2}{v_{Fi}} \\
C_\rho^{ij} &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{(g_\rho/2)^2}{\omega^2 - \omega_\rho^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{p_{Fj}^2}{v_{Fi}}; \\
C_A^{ij} &= -\frac{e^2}{2\pi^2} \frac{1}{q^2} \frac{p_{Fj}^2}{v_{Fi}},
\end{aligned} \tag{5.391}$$

e obtemos na última expressão:

$$\begin{aligned}
A_{\omega i} + \sum_{j=p,n} \left[C_s^{ij} - C_v^{ij} - \tau_i \tau_j C_\rho^{ij} - \frac{Q_i Q_j}{e^2} C_A^{ij} \right] L(S_i) A_{\omega j} \\
+ \frac{Q_i Q_e}{e^2} C_A^{ie} L(S_i) A_{\omega e} = 0; \\
A_{\omega e} = - \sum_{j=p,e} \frac{Q_e Q_j}{e^2} C_A^{ej} L(S_e) A_{\omega j} = 0.
\end{aligned} \tag{5.392}$$

Estas últimas equações são idênticas às obtidas nas referências citadas para o caso em questão, mostrando que as expressões para as

relações de dispersão com campo magnético forte se reduzem àquelas já obtidas para o caso do campo magnético nulo, no regime adequado.

Agora, vamos obter expressões relacionando especificamente as flutuações nas densidades umas com as outras, de maneira a obter uma matriz que permita o cálculo auto-consistente das densidades e campos. Para fixar a notação, primeiro consideraremos especificamente o elétron. As expressões associadas aos prótons e nêutrons são obtidas por analogia. Para chegar às relações de dispersão para os modos longitudinais, vemos das equações (5.376), (5.379) e (5.380) que precisamos calcular:

$$D_{\parallel}^{(e)} = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} f_{0e+}. \quad (5.393)$$

Na função de distribuição de equilíbrio, toda a dependência na componente paralela do momento, p_{\parallel} , encontra-se na função de Heaviside, $\theta(\mu_e - \epsilon_n)$, para temperatura zero. Portanto:

$$D_{\parallel}^{(e)} \propto \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \theta(\mu_e - \epsilon_n) = \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \theta(\mu_e - \sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}). \quad (5.394)$$

Definindo $u = \mu_e - \sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}$,

$$\frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \theta(u) = \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial p_{\parallel}} = \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}} \delta(\mu_e - \sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}). \quad (5.395)$$

Agora, considerando a propriedade da função delta de Dirac:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i),$$

onde $f(x_i) = 0$, e $f'(x_i) \neq 0$, e supondo:

$$f(p_{\parallel}) = \mu_e - \sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}, \quad (5.396)$$

temos:

$$f'(p_{\parallel}) = -\frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}}, \quad (5.397)$$

e temos que:

$$\begin{aligned}
f(p_{\parallel}) = 0 &\Rightarrow \mu_e - \sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2} = 0 \Rightarrow \mu_e^2 = p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2 \\
&\Rightarrow p_{\parallel} = \pm \sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2} \Rightarrow f'(p_{\parallel}) \neq 0.
\end{aligned}
\tag{5.398}$$

Definimos:

$$p_F(n) \equiv \sqrt{\mu_e^2 - p_n^2 - m_e^2} = \sqrt{\mu_e^2 - 2eBn - m_e^2} \geq 0. \tag{5.399}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \theta(u) &= - \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}} \left[\frac{p_{\parallel}}{\left| \frac{\delta(p_{\parallel} - p_{Fn})}{\sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}} \right|} + \frac{\delta(p_{\parallel} + p_{Fn})}{\left| \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_n^2 + m_e^2 + p_{\parallel}^2}} \right|} \right] \\
&= -\delta(p_{\parallel} - p_{Fn}) + \delta(p_{\parallel} + p_{Fn}).
\end{aligned}
\tag{5.400}$$

Usando o resultado acima e aqueles obtidos para a função de distribuição somadas nos spins, podemos reescrever a equação (5.376) para os elétrons como a seguir, somando de maneira trivial as contribuições de spin positivo e negativo:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_e^{(k)} &= \tilde{L}_{es=1}^{(k)} + \tilde{L}_{es=-1}^{(k)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \frac{1}{(E_p^{(0)})^k} \frac{D_\parallel^{(e)}}{\frac{\omega}{q} - p_\parallel} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \int dp_\perp p_\perp \int dp_\parallel \\
&\quad - \frac{1}{(\sqrt{p_\parallel^2 + p_\perp^2 + m_e^2})^k} \frac{e^{-w^2}}{\frac{\omega}{q} - \frac{p_\parallel}{\sqrt{p_\parallel^2 + p_\perp^2 + m_e^2}}} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1+s}{2} \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left[-\frac{\epsilon_n^0 + m_e}{2\epsilon_n^0} L_{n-1}(2w^2) + \frac{\epsilon_n^0 - m_e}{2\epsilon_n^0} L_n(2w^2) \right] \right. \\
&\quad \times [\delta(p_\parallel - p_F(n)) - \delta(p_\parallel + p_F(n))] \\
&\quad - \frac{1-s}{2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left[-\frac{\epsilon_n^0 + m_e}{2\epsilon_n^0} L_{n-1}(2w^2) + \frac{\epsilon_n^0 - m_e}{2\epsilon_n^0} L_n(2w^2) \right] \\
&\quad \left. \times [\delta(p_\parallel - p_F(n)) - \delta(p_\parallel + p_F(n))] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.401}$$

Notamos que foi omitido o fator $\frac{1}{(2\pi)^3}$, que multiplica a função de distribuição de equilíbrio. Isto não modificará o cálculo dos modos normais ou das variações relativas de densidade. Agora, como:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \frac{1}{(\sqrt{p_\parallel^2 + p_\perp^2 + m_e^2})^k} \frac{1}{\frac{\omega}{q} - \frac{p_\parallel}{p_\parallel^2 + p_\perp^2 + m_e^2}} \\
&\quad \times [\delta(p_\parallel - p_F(n)) - \delta(p_\parallel + p_F(n))] \\
&= \frac{1}{\sqrt{(p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2)^k}} \left[\frac{1}{\frac{\omega}{q} - \frac{p_F(n)}{p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2}} - \frac{1}{\frac{\omega}{q} + \frac{p_F(n)}{p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2}} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{(p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2)^k}} \frac{\frac{2p_F(n)}{p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2}}{\left(\frac{\omega}{q} - \frac{p_F(n)}{p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2} \right) \left(\frac{\omega}{q} + \frac{p_F(n)}{p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2} \right)} \\
&= \frac{2p_F(n)}{\sqrt{(p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2)^{k+1}}} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{q} \right)^2 - \frac{p_F^2(n)}{p_F^2(n) + p_\perp^2 + m_e^2}}.
\end{aligned} \tag{5.402}$$

Substituindo a expressão acima na equação (5.401), temos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_e^{(k)} = & \frac{1}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \left\{ \frac{1+s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int dp_{\perp} p_{\perp} \right. \\
 & \times \left[-\frac{\epsilon_n^0 + m_e}{2\epsilon_n^0} L_{n-1}(2w^2) + \frac{\epsilon_n^0 - m_e}{2\epsilon_n^0} L_n(2w^2) \right] \\
 & \times (-1)^n 2p_F(n) \frac{-e^{-w^2}}{\sqrt{(p_F^2(n) + p_{\perp}^2 + m_e^2)^{k+1}}} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{q}\right)^2 - \frac{p_F^2(n)}{p_F^2(n) + p_{\perp}^2 + m_e^2}} \\
 & + \frac{1-s}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int dp_{\perp} p_{\perp} \\
 & \times \left[-\frac{\epsilon_n^0 + m_e}{2\epsilon_n^0} L_{n-1}(2w^2) + \frac{\epsilon_n^0 - m_e}{2\epsilon_n^0} L_n(2w^2) \right] \\
 & \times (-1)^n 2p_F(n) \frac{-e^{-w^2}}{\sqrt{(p_F^2(n) + p_{\perp}^2 + m_e^2)^{k+1}}} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{q}\right)^2 - \frac{p_F^2(n)}{p_F^2(n) + p_{\perp}^2 + m_e^2}} \left. \right\} \\
 & \quad (5.403)
 \end{aligned}$$

Aqui, vamos definir a nova variável $u = 2w^2$, lembrando que $w^2 = \frac{p_{\perp}^2}{eB}$ e, portanto, $p_{\perp}^2 = eBw^2 = \frac{eB}{2}u$. Assim:

$$\frac{du}{dp_{\perp}} = \frac{d}{dp_{\perp}} 2 \frac{p_{\perp}^2}{eB} = 4 \frac{p_{\perp}}{eB} \Rightarrow p_{\perp} dp_{\perp} = \frac{eB}{4} du,$$

e as novas funções dadas por:

$$\begin{aligned}
 I_{(1)}^{(k)}(n, p_F(n), m_e, \frac{\omega}{q}) & \equiv \int_0^{\infty} du e^{-\frac{u}{2}} L_n(u) (-1)^{n+1} 2p_F(n) \\
 & \times \frac{eB}{4} \frac{1}{(p_F^2(n) + m_e^2 + \frac{eB}{2}u)^{\frac{k+1}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{q}\right)^2 - \frac{p_F^2(n)}{p_F^2(n) + m_e^2 + \frac{eB}{2}u}}.
 \end{aligned}$$

$$I_{(2)}^{(k)}(n, p_F(n), m_e, \frac{\omega}{q}) \equiv \int_0^\infty du e^{-\frac{u}{2}} L_{n-1}(u) (-1)^{n+1} 2p_F(n) \times \frac{eB}{4} \frac{1}{(p_F^2(n) + m_e^2 + \frac{eB}{2}u)^{\frac{k+1}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{q}\right)^2 - \frac{p_F^2(n)}{p_F^2(n) + m_e^2 + \frac{eB}{2}u}}, \quad (5.404)$$

Deste modo, vamos escrever, por conveniência, $\tilde{L}_e^{(k)} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_e^{(k)}$, com:

$$\begin{aligned} \bar{L}_e^{(k)} = & \sum_{s=\pm 1} \left\{ \frac{1+s}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[-\frac{\epsilon_n^0 + m_e}{2\epsilon_n^0} I_{(2)}^{(k)}(n, p_F(n), m_e, \frac{\omega}{q}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\epsilon_n^0 - m_e}{2\epsilon_n^0} I_{(1)}^{(k)}(n, p_F(n), m_e, \frac{\omega}{q}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1-s}{2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left[-\frac{\epsilon_n^0 + m_e}{2\epsilon_n^0} I_{(2)}^{(k)}(n, p_F(n), m_e, \frac{\omega}{q}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\epsilon_n^0 - m_e}{2\epsilon_n^0} I_{(1)}^{(k)}(n, p_F(n), m_e, \frac{\omega}{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.405)$$

Analogamente, para o próton, $\tilde{L}_p^{(k)} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_p^{(k)}$, com:

$$\begin{aligned} \bar{L}_p^{(k)} = & \sum_{s=\pm 1} \left\{ \frac{1+s}{2} \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[-\frac{\epsilon_n^0 + M^*}{2\epsilon_n^0} I_{(2)}^{(k)}(n, p_F(n), M^*, \frac{\omega}{q}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\epsilon_n^0 - M^*}{2\epsilon_n^0} I_{(1)}^{(k)}(n, p_F(n), M^*, \frac{\omega}{q}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1-s}{2} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left[-\frac{\epsilon_n^0 + M^*}{2\epsilon_n^0} I_{(2)}^{(k)}(n, p_F(n), M^*, \frac{\omega}{q}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\epsilon_n^0 - M^*}{2\epsilon_n^0} I_{(1)}^{(k)}(n, p_F(n), M^*, \frac{\omega}{q}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.406)$$

Por fim, podemos reescrever as relações de dispersão, das equações (5.379) e (5.380), como:

$$\begin{aligned}
\delta\rho_i &= \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) \sum_{j=p,n} \left[\left(\frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{\omega^2 - \omega_\rho^2} + \frac{Q_i Q_j}{\omega^2 - q^2} \right) \delta\rho_j \right. \\
&\quad \left. + \frac{Q_i Q_e}{\omega^2 - q^2} \delta\rho_e \right] \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(0)} - \frac{g_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2} M^{*(0)} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(1)},
\end{aligned} \tag{5.407}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\rho}_{si} &= \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) \sum_{j=p,n} \left[\frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{\omega^2 - \omega_\rho^2} + \frac{Q_i Q_j}{\omega^2 - q^2} \right] \\
&\quad \times \delta\rho_j M^{*(0)} \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(1)} \\
&\quad - \frac{g_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2} M^{*(0)2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(2)}.
\end{aligned} \tag{5.408}$$

As equações acima podem ser reescritas novamente como:

$$\begin{aligned}
\delta\rho_i &= \sum_{j=p,n} \left[B_v^{ij} + \tau_i \tau_j B_\rho^{ij} + \frac{Q_i Q_j}{e^2} B_A^{ij} \right] \bar{L}_i^{(0)} \delta\rho_j \\
&\quad + \frac{Q_i Q_j}{e^2} B_A^{ie} \bar{L}_i^{(0)} \delta\rho_e - B_s M^{*(0)} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \bar{L}_i^{(1)},
\end{aligned} \tag{5.409}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\rho}_{si} &= \sum_{j=p,n} \left[B_v^{ij} + \tau_i \tau_j B_\rho^{ij} + \frac{Q_i Q_j}{e^2} B_A^{ij} M^{*(0)} \right] \bar{L}_i^{(1)} \delta\rho_j \\
&\quad - B_s M^{*(0)2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \bar{L}_i^{(2)},
\end{aligned} \tag{5.410}$$

$$\delta\rho_e = \sum_{j=p,n} \frac{Q_e Q_j}{e^2} B_A^{ej} \bar{L}_e^{(0)} \delta\rho_j. \tag{5.411}$$

Acima, definimos:

$$B_v^{ij} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right); \quad (5.412)$$

$$B_\rho^{ij} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \frac{(g_\rho/2)^2}{\omega^2 - \omega_\rho^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right); \quad (5.413)$$

$$B_A^{ij} \equiv -\frac{e^2}{2\pi^2} \frac{1}{q^2}; \quad (5.414)$$

$$B_s \equiv \frac{1}{2\pi^2} \frac{g_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2}. \quad (5.415)$$

Definindo também:

$$F^{ij} \equiv - \left(B_v^{ij} + \tau_i \tau_j B_\rho^{ij} + \frac{Q_i Q_j}{e^2} B_A^{ij} \right), \quad (5.416)$$

podemos escrever de forma ainda mais compacta as equações para as densidades bariônica e escalar:

$$\begin{aligned} \delta\rho_i + \sum_{j=p,n} F^{ij} \bar{L}_i^{(0)} \delta\rho_j - \frac{Q_i Q_j}{e^2} B_A^{ie} \bar{L}_e^{(0)} \delta\rho_e \\ + M^{*(0)} B_s \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \bar{L}_i^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (5.417)$$

$$\delta\tilde{\rho}_{si} + \sum_{j=p,n} F^{ij} M^{*(0)} \bar{L}_i^{(1)} \delta\rho_j + B_s M^{*(0)2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \bar{L}_i^{(2)} = 0. \quad (5.418)$$

De forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1+F^{pp}\bar{L}_p^{(0)} & F^{pn}\bar{L}_p^{(0)} & B_A^{pe}\bar{L}_p^{(0)} & M^{*(0)}B_s\bar{L}_p^{(1)} & M^{*(0)}B_s\bar{L}_p^{(1)} \\ F^{np}\bar{L}_n^{(0)} & 1+F^{nn}\bar{L}_n^{(0)} & 0 & M^{*(0)}B_s\bar{L}_n^{(1)} & M^{*(0)}B_s\bar{L}_n^{(1)} \\ B_A^{ep}\bar{L}_e^{(0)} & 0 & 1-B_A^{ee}\bar{L}_e^{(0)} & 0 & 0 \\ F^{pp}M^{*(0)}\bar{L}_p^{(1)} & F^{pn}M^{*(0)}\bar{L}_n^{(1)} & 0 & 1+B_sM^{*(0)2}\bar{L}_p^{(2)} & B_sM^{*(0)2}\bar{L}_n^{(2)} \\ F^{nn}M^{*(0)}\bar{L}_n^{(1)} & F^{np}M^{*(0)}\bar{L}_n^{(1)} & 0 & B_sM^{*(0)2}\bar{L}_p^{(2)} & 1+B_sM^{*(0)2}\bar{L}_n^{(2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho_p \\ \rho_n \\ \rho_e \\ \rho_{sp} \\ \rho_{sn} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.419)$$

Notamos aqui que no caso do nêutron, a função de distribuição de equilíbrio é dada por $f_{0n} = \frac{1}{(2\pi)^3}\theta(\mu_n - \epsilon_n)$, com $\epsilon_n = \sqrt{p^2 + M^{*2}}$. O fator $\frac{1}{(2\pi)^3}$ está de acordo com a nossa definição da função de distribuição, onde:

$$N_n = \int d^3x d^3p f_{0n} = V \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{Fn}} dp p^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta = \frac{p_{Fn}^3}{3\pi^2}. \quad (5.420)$$

Por esse motivo, ao calcular os termos $\bar{L}_n^{(u)}$, omitiremos o fator $\frac{1}{(2\pi)^3}$, como foi feito mais acima onde se realizou o teste de consistência da função.

5.8 PERTURBAÇÕES TRANSVERSAIS

Vamos calcular as relações de dispersão para o caso $\vec{B} = B\hat{z}$, $T = 0$, considerando, desta vez, os modos de propagação transversais. Para esses modos, utilizando a mesma notação da seção anterior, escolheremos uma flutuação na direção de \hat{e}_x . Assim, temos que $q_{\parallel} = 0$, $q_{\perp} = q_x = q$; $\delta\mathcal{V}_{iz} = \delta\mathcal{V}_{iy} = 0$. Da expressão obtida para as variações nas densidades (5.342), com as restrições acima, escrevemos:

$$\begin{aligned} \delta\rho_{i\pm}(\omega, \vec{q}) = & S_{i\pm} \left[\frac{m}{b} J_m^2(b) \omega D_{\perp\pm}^{(i)} \right] \delta\mathcal{V}_{ix} - S_{i\pm} \left[J_m^2(b) q \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} \right] \delta\mathcal{V}_{i0} \\ & \pm S_{i\pm} \left[\frac{J_m^2(b)}{E_p^{(0)}} q \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} \right] g_s M^{*(0)} \delta\phi. \end{aligned} \quad (5.421)$$

Dado que $\omega\delta\mathcal{V}_{i0} = \vec{q} \cdot \delta\vec{\mathcal{V}}_i$, temos que $\omega\delta\mathcal{V}_{i0} = q\delta\mathcal{V}_{ix}$, ou seja, $\delta\mathcal{V}_{ix} = \frac{\omega}{q}\delta\mathcal{V}_{i0}$. Logo,

$$\begin{aligned} \delta\rho_{i\pm}(\omega, \vec{q}) = & -q \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) S_{i\pm} \left[J_m^2(b) D_{\perp\pm}^{(i)} \frac{m}{b} \right] \delta\mathcal{V}_{i0} \\ & \pm q S_{i\pm} \left[\frac{J_m^2(b)}{E_p^{(0)}} \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} \right] g_s M^{*(0)} \delta\phi. \end{aligned} \quad (5.422)$$

A função $S_{i\pm}[x]$ está definida na equação (5.341) e neste caso aparecem:

$$S_{i\pm} \left[J_m^2(b) D_{\perp\pm}^{(i)} \frac{m}{b} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{dp_{\perp} p_{\perp} dp_{\parallel} J_m^2(b) D_{\perp\pm}^{(i)} \frac{m}{b}}{\omega \mp \frac{Q_i B m}{E_p^{(0)}}}, \quad (5.423)$$

$$S_{i\pm} \left[\frac{J_m^2(b)}{E_p^{(0)}} \frac{m}{b} D_{\perp\pm}^{(i)} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{1}{E_p^{(0)}} \frac{dp_{\perp} p_{\perp} dp_{\parallel} J_m^2(b) D_{\perp\pm}^{(i)} \frac{m}{b}}{\omega \mp \frac{Q_i B m}{E_p^{(0)}}}, \quad (5.424)$$

onde os somatórios são realizados até o último nível de Landau ocupado, e um dos termos no denominador da equação (5.341) é nulo devido ao fato de que $q_{\perp} = 0$ nos modos transversais. A partir da definição de $\tilde{L}_{i\pm}^{(k)}$ na equação (5.376), faremos uma modificação para comportar as funções de Bessel que, neste caso, devem ser também integradas:

$$\tilde{L}_{i\pm}^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} q \int dp_{\perp} p_{\perp} \int dp_{\parallel} \frac{1}{E_p^{(k)}} \frac{J_m^2(b) D_{\perp\pm}^{(i)} \frac{m}{b}}{\omega \mp \frac{Q_i B m}{E_p^{(0)}}}, \quad (5.425)$$

Desta maneira, escrevemos as flutuações nas densidades como:

$$\delta\rho_{i\pm}(\omega, \vec{q}) = -\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) \tilde{L}_{i\pm}^{(0m)} \delta\mathcal{V}_{i0} \pm g_s M^{*(0)} \tilde{L}_{i\pm}^{(1m)} \delta\phi \quad (5.426)$$

e, analogamente para as flutuações nas densidades escalares:

$$\delta\rho_{si\pm}(\omega, \vec{q}) = -\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) \tilde{L}_{i\pm}^{(1m)} \delta\mathcal{V}_{i0} \pm g_s M^{*(0)} \tilde{L}_{i\pm}^{(2m)} \delta\phi. \quad (5.427)$$

Utilizando as equações de movimento, temos:

$$\begin{aligned} \delta\rho_i &= \delta\rho_{i+} + \delta\rho_{i-} = \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) \left(\tilde{L}_{i+}^{(0)} - \tilde{L}_{i-}^{(0)}\right) \\ &\times \left(\sum_{j=p,n} D_{ij} \delta\rho_j + \frac{Q_i Q_e}{-\omega^2 + q^2} \delta\rho - e\right) \\ &+ g_s M^{*(0)} \left(\tilde{L}_{i+}^{(1)} + \tilde{L}_{i-}^{(1)}\right) \frac{g_s}{-\omega^2 + \omega_s^2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \end{aligned} \quad (5.428)$$

$$\begin{aligned} \delta\rho_{si} &= \delta\rho_{si+} + \delta\rho_{si-} = \left(1 - \frac{\omega^2}{q^2}\right) M^{*(0)} \left(\tilde{L}_{i+}^{(1)} + \tilde{L}_{i-}^{(1)}\right) \\ &\times \left(\sum_{j=p,n} D_{ij} \delta\rho_j + \frac{Q_i Q_e}{-\omega^2 + q^2} \delta\rho - e\right) \\ &+ g_s M^{*(0)2} \left(\tilde{L}_{i+}^{(2)} - \tilde{L}_{i-}^{(2)}\right) \frac{g_s}{-\omega^2 + \omega_s^2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \end{aligned} \quad (5.429)$$

Agora vamos realizar o cálculo de $D_{\perp\pm}^{(i)}$ para o caso dos elétrons. Começando com os elétrons e omitindo o fator $\frac{1}{2\pi^2}$, como na última seção, temos, para $T = 0$:

$$D_{\perp\pm}^{(e)} \equiv D_{\perp}^{(e)} = \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} f_{0e}, \quad (5.430)$$

$$\begin{aligned}
D_{\perp}^{(e)} &= \theta(E_F - \epsilon_0) \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \left\{ L_0(2w^2) e^{-w^2} \right\} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \theta(E_F - \epsilon_n) (-1)^n \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \left\{ [L_n(2w^2) - L_{n-1}(2w^2)] e^{-w^2} \right\},
\end{aligned} \tag{5.431}$$

onde $w^2 = \frac{p_{\perp}^2}{eB}$ contém toda a dependência em p_{\perp} . Derivando os polinômios utilizando a propriedade:

$$L'_n(x) = -L_{n-1}^1(x), \tag{5.432}$$

onde $L_n^1(x)$ é o polinômio de Laguerre generalizado, com $\alpha = 1$. Então, temos:

$$\begin{aligned}
D_{\perp}^{(e)} &= \theta(E_F - \epsilon_0) e^{-w^2} \left[-\frac{2p_{\perp}}{eB} L_0(2w^2) \right] \\
&+ \theta(E_F - \epsilon_1) e^{-w^2} \left[\frac{4p_{\perp}}{eB} L_1(2w^2) \right] \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \theta(E_F - \epsilon_n) e^{-w^2} \left\{ \frac{-2p_{\perp}}{eB} [L_n(2w^2) - L_{n-1}(2w^2)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{4p_{\perp}}{eB} [L_{n-1}^1(2w^2) - L_{n-2}^1(2w^2)] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.433}$$

Utilizaremos agora mais uma propriedade dos polinômios de Laguerre:

$$L_{n-2}^1(x) = \frac{2n-x}{n} L_{n-1}^1(x) - L_n^1(x), \tag{5.434}$$

Com esta propriedade recursiva, podemos eliminar os termos que contém polinômios com índices $n-2$. Assim, também não será necessário separar o termo para $n = 1$. Calculando, obtemos:

$$\begin{aligned}
D_{\perp}^{(e)} = & \theta(E_F - \epsilon_0) e^{-w^2} \left[-\frac{2p_{\perp}}{eB} L_0(2w^2) \right] \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \theta(E_F - \epsilon_n) e^{-w^2} \left\{ \frac{-2p_{\perp}}{eB} [L_n(2w^2) - L_{n-1}(2w^2)] \right. \\
& \left. - \frac{4p_{\perp}}{eB} \left[L_n^1(2w^2) + \frac{2w^2 - n}{n} L_{n-1}^1(2w^2) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.435}$$

Devido ao fato da função de distribuição de equilíbrio conter uma função θ de Heaviside limitando a energia ϵ_n à energia de Fermi, não serão possíveis quaisquer valores para n , de maneira que os somatórios dos polinômios terão um limite que depende dos parâmetros do sistema: o campo magnético externo e a energia de Fermi. Especificamente, para os elétrons, obtemos um valor máximo para n de $n_{max} \leq \frac{E_F^2 - m_e^2}{2eB}$, sendo necessário tomar o maior número inteiro que satisfaça essa condição. Para as demais espécies, o resultado é similar. Nas próximas equações, já escreveremos os somatórios como estando limitados superiormente em $n = n_{max}$.

Para obter o valor de \tilde{L}_e^k , somaremos as contribuições de spin positivo e negativo. Assim como na seção anterior, a soma é trivial já que a função não depende explicitamente do spin. Também é preciso notar que as integrais na componente paralela do momento, acima, são limitadas pela função θ de Heaviside, de forma que o limite superior é igual ao momento de Fermi, p_{Fn} . Então, escreveremos \tilde{L}_e^k como:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_e^k &= \tilde{L}_{e,s=1}^k + \tilde{L}_{e,s=-1}^k = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} 4 \left(\frac{Q_e}{e} \right) \\
&\int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \int_0^{p_{Fn}} dp_{\parallel} \frac{1}{(\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + m_e^2})^k} \frac{J_m^2(b) e^{-w^2} m}{\omega - \frac{Q_e B m}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 + m_e^2}}} \\
&\times \left\{ -L_0(2w^2) \frac{\epsilon_0 + m_e}{2\epsilon_0} + \sum_{n=1}^{n_{max}} (-1)^n \frac{\epsilon_n + m_e}{2\epsilon_n} \right. \\
&\times \left[-L_n(2w^2) + L_{n-1}(2w^2) \right. \\
&\left. \left. - 2L_n^1(2w^2) - \left(\frac{4p_{\perp}^2}{eBn} - 2 \right) L_{n-1}^1(2w^2) \right] \right\} \quad (5.436)
\end{aligned}$$

onde omitimos o fator $\frac{1}{(2\pi)^3}$ que multiplica a função de distribuição de equilíbrio. Definimos agora as funções que contêm as integrais:

$$\begin{aligned}
I_{(0)}^{(k)}(m, m_e, \omega) &\equiv \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} e^{-w^2} J_m^2(b) m \\
&\times \int_0^{p_{Fn}} dp_{\parallel} \frac{1}{(\sqrt{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m_e^2})^k} \frac{1}{\omega + \frac{eBm}{\sqrt{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m_e^2}}} \frac{\epsilon_0 + m_e}{2\epsilon_0};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{(1)}^{(k)}(m, n, m_e, \omega) &\equiv \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} e^{-w^2} \\
&\times [L_n(2w^2) + 2L_n^1(2w^2)] (-1)^n J_m^2(b) m \\
&\times \int_0^{p_{Fn}} dp_{\parallel} \frac{1}{(\sqrt{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m_e^2})^k} \frac{1}{\omega + \frac{eBm}{\sqrt{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 + m_e^2}}} \frac{\epsilon_n + m_e}{2\epsilon_n};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{(2)}^{(k)}(m, n, m_e, \omega) &\equiv - \int_0^\infty dp_\perp p_\perp e^{-w^2} \\
&\times \left[L_{n-1}(2w^2) + \left(2 - \frac{4p_\perp^2}{eBn} \right) L_{n-1}^1(2w^2) \right] (-1)^n J_m^2(b) m \\
&\times \int_0^{p_{Fn}} dp_\parallel \frac{1}{(\sqrt{p_\perp^2 + p_\parallel^2 + m_e^2})^k} \frac{1}{\omega + \frac{eBm}{\sqrt{p_\perp^2 + p_\parallel^2 + m_e^2}}} \frac{\epsilon_n + m_e}{2\epsilon_n},
\end{aligned} \tag{5.437}$$

onde usamos que $L_0(x) = 1$. No caso dos modos transversais temos que resolver as integrais que dependem da componente paralela do momento, além de somar para todos os níveis de Landau ocupados, o que tornará os cálculos numéricos mais extensos. Agora, vamos escrever, por conveniência, $\tilde{L}_e^{(k)} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_e^{(k)}$, com:

$$\begin{aligned}
\bar{L}_e^{(k)} &= 4 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ I_{(0)}^{(k)}(m, m_e, \omega) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{n_{max}} \left[I_{(1)}^{(k)}(m, n, m_e, \omega) + I_{(2)}^{(k)}(m, n, m_e, \omega) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.438}$$

Analogamente, para o próton, $\tilde{L}_p^{(k)} \equiv \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_p^{(k)}$, entendendo as integrais agora dependendo de M^* em vez de m_e , e da carga do próton no lugar da do elétron. Para o nêutron, a situação é análoga, com carga nula. Como na seção anterior, podemos escrever as equações (5.428) e (5.429) na forma das equações (5.407) e (5.408):

$$\begin{aligned}
\delta\rho_i &= \sum_{j=p,n} \left[\left(\frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{\omega^2 - \omega_\rho^2} + \frac{Q_i Q_j}{\omega^2 - q^2} \right) \delta\rho_j + \frac{Q_i Q_e}{\omega^2 - q^2} \delta\rho_e \right] \\
&\times \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(0)} \right] \\
&- \frac{g_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2} M^{*(0)} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(1)},
\end{aligned} \tag{5.439}$$

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{\rho}_{si} = & \sum_{j=p,n} \left[\frac{g_v^2}{\omega^2 - \omega_v^2} + \frac{(g_\rho/2)^2 \tau_i \tau_j}{\omega^2 - \omega_\rho^2} + \frac{Q_i Q_j}{\omega^2 - q^2} \right] \delta\rho_j M^{*(0)} \\
& \times \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{q^2} \right) \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(1)} \right] \\
& - \frac{g_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2} M^{*(0)2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \frac{1}{2\pi^2} \bar{L}_i^{(2)}.
\end{aligned} \tag{5.440}$$

$$\delta\rho_e = \sum_{j=p,n} \frac{Q_e Q_j}{e^2} B_A^{ej} \left(\bar{L}_e^{(0)} \right) \delta\rho_j, \tag{5.441}$$

ou simplesmente:

$$\begin{aligned}
\delta\rho_i + \sum_{j=p,n} F^{ij} \left(\bar{L}_i^{(0)} \right) \delta\rho_j - \frac{Q_i Q_j}{e^2} B_A^{ie} \left(\bar{L}_e^{(0)} \right) \delta\rho_e \\
+ M^{*(0)} B_s \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \left(\bar{L}_i^{(1)} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{5.442}$$

$$\delta\rho_{si} + \sum_{j=p,n} F^{ij} M^{*(0)} \left(\bar{L}_i^{(1)} \right) \delta\rho_j + B_s M^{*(0)2} \sum_{j=p,n} \delta\tilde{\rho}_{sj} \bar{L}_i^{(2)} = 0. \tag{5.443}$$

com as mesmas definições das equações (5.412) - (5.416), embora com diferentes funções $\bar{L}_i^{(k)}$. Assim, obtemos as relações de dispersão na forma matricial, essencialmente igual à equação (5.419). A complexidade adicional dos modos transversais se encontra, em termos numéricos, em resolver as integrais e somatórios que têm uma forma menos conveniente do que para o caso longitudinal. Abaixo, as relações de dispersão:

$$\begin{bmatrix}
1+F^{pp}\bar{L}_p^{(0)} & F^{pn}\bar{L}_p^{(0)} & B_A^{pe}\bar{L}_p^{(0)} & M^{*(0)}B_s\bar{L}_p^{(1)} & M^{*(0)}B_s\bar{L}_p^{(1)} \\
F^{np}\bar{L}_n^{(0)} & 1+F^{nn}\bar{L}_n^{(0)} & 0 & M^{*(0)}B_s\bar{L}_n^{(1)} & M^{*(0)}B_s\bar{L}_n^{(1)} \\
B_A^{ep}\bar{L}_e^{(0)} & 0 & 1-B_A^{ee}\bar{L}_e^{(0)} & 0 & 0 \\
F^{pp}M^{*(0)}\bar{L}_p^{(1)} & F^{pn}M^{*(0)}\bar{L}_n^{(1)} & 0 & 1+B_sM^{*(0)2}\bar{L}_p^{(2)} & B_sM^{*(0)2}\bar{L}_n^{(2)} \\
F^{nn}M^{*(0)}\bar{L}_n^{(1)} & F^{np}M^{*(0)}\bar{L}_n^{(1)} & 0 & B_sM^{*(0)2}\bar{L}_p^{(2)} & 1+B_sM^{*(0)2}\bar{L}_n^{(2)}
\end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \rho_p \\ \rho_n \\ \rho_e \\ \rho_{sp} \\ \rho_{sn} \end{bmatrix} = 0. \tag{5.444}$$

6 CÁLCULO COMPUTACIONAL E RESULTADOS

As equações obtidas na seção anterior, (5.419) e (5.444), permitem encontrar as regiões de instabilidade na matéria nuclear estudada, para os casos longitudinal e transversal, respectivamente. Como explicado na introdução deste trabalho, nosso objetivo é encontrar os pontos onde há soluções para estas equações e analisar a curva por eles descrita, procurando as interseções com as espinodais características desta matéria, para estudar a transição de fase de primeira ordem que deve ocorrer nas crostas das estrelas de nêutrons. Dado que a introdução de um campo magnético forte necessariamente altera as distribuições de partículas carregadas, é evidente que algum formalismo que introduza fenômenos de transporte deve ser levado em conta para uma descrição precisa dos fenômenos envolvidos. Um estudo na mesma linha pode ser encontrado em (FANG et al., 2016), onde se conclui que o aparecimento de uma estrutura de bandas na espinodal dinâmica sugere que devem surgir fases heterogêneas na parte interior da crosta das estrelas de nêutrons, além da fase “pasta”. A nossa contribuição para o desenvolvimento desta linha de pesquisa é a inclusão explícita das equações de transporte através de um formalismo derivado de primeiros princípios a partir da formulação de Wigner da Mecânica Quântica, diferentemente do uso de funções geratrizes no artigo citado.

As equações matriciais supracitadas não são de difícil resolução por métodos numéricos. No entanto, o cálculo das funções que estão implícitas nas equações demanda a realização de uma integral dupla nos momentos paralelo e transversal, assim como duas somas: uma nos índices da expansão em funções de Bessel e outra nos níveis de Landau. Particularmente, para campos magnéticos menos altos, no contexto dos magnetares - da ordem de $10^{16}G$ - os níveis de Landau se comprimem, havendo mais níveis ocupados para uma dada densidade de energia. Isso faz com que o tempo computacional necessário para somar as contribuições de todos os níveis se alargue consideravelmente. Neste trabalho, nosso foco esteve, sobretudo, no desenvolvimento da teoria e da técnica necessária para o estudo das transições de fase na crosta das estrelas de nêutrons com o uso das equações de transporte. Os dados que serão aqui expostos servem, neste sentido, como demonstração da aplicabilidade do método. Deixamos cálculos e análises mais aprofundadas e precisas sobre os diversos casos possíveis e interessantes para investigações futuras.

Os métodos numéricos utilizados, em si, envolvem a execução de

um código compilado em linguagem FORTRAN que ataca o problema diretamente, resolvendo as integrais (5.404) e (5.437). São utilizados os métodos de pesos de Gauss e Gauss-Hermite e somados os índices até o maior nível de Landau ocupado e, no caso do índice m , até um valor de corte arbitrário para o qual os valores subsequentes pouco alteram a soma. Os *inputs* são o valor em módulo do campo magnético externo e do momento transferido. As densidades de prótons e nêutrons são variadas passo a passo, longitudinalmente e diagonalmente em um plano $\rho_n \times \rho_p$ de maneira a procurar uma solução para uma ampla variedade de combinações de densidades, de maneira a aproximarem-se os resultados finais da espinodal contínua. Para cada uma destas combinações, as integrais são calculadas e as equações matriciais são resolvidas. Assim que o programa atinge valores próximos de zero para o determinante da matriz, ele realiza ajustes finos para encontrar mais precisamente a solução correta.

Nas tabelas (1) e (2) explicitamos os valores assumidos nas parametrizações:

Parâmetro	Valor
M	939 MeV
m_s	508.194 MeV
m_v	782.501 MeV
m_ρ	763 MeV
g_s	10.217
g_v	12.868
g_ρ	8.948
κ	20.862
λ	-173.31
ρ_0	0.148 fm^{-3}

Tabela 1 – Valores dos parâmetros para a parametrização NL3.

Abaixo, nas figuras (1) e (2), reproduzimos os resultados de cálculos para os modos longitudinais. Além da amplamente utilizada parametrização NL3 (BOGUTA; BODMER, 1977) do modelo de Walecka, cujos termos não-lineares adicionamos explicitamente à lagrangeana no capítulo 2, também realizamos cálculos utilizando a parametrização FSU, proposta mais recentemente (TODD-RUTEL; PIEKAREWICZ, 2005). O objetivo é verificar alterações nos resultados que sejam dependentes de modelo. Em particular, por meio dos estudos recentes (PAAR et al., 2014; DUCOIN et al., 2011; SULAKSONO; ALAM; AGRAWAL, 2014; PAIS

Parâmetro	Valor
M	939 MeV
m_s	491.5 MeV
m_v	782.5 MeV
m_ρ	763 MeV
g_s	10.592
g_v	14.302
g_ρ	11.767
κ	$1.4203 \times g_s^3$
λ	$0.023762 \times g_s^4$
ξ	$0.06 \times g_v^4$
g_{wr}	$0.03 \times g_\rho^2 g_v^2$
ρ_0	0.148 fm^{-3}

Tabela 2 – Valores dos parâmetros para a parametrização FSU.

et al., 2016) sabe-se que as densidades para as quais ocorre a transição de fase variam muito com a dependência na densidade da energia de simetria, e muitos esforços vêm sendo dispendidos para melhorar os vínculos que se tem para ela (FATTOYEV et al., 2013).

Nos gráficos a seguir, cada ponto representa um par de densidades para a qual uma solução das equações diferenciais acopladas foi encontrada pelo nosso programa e, portanto, o seu conjunto delimita uma zona de instabilidade que tem relação com a transição de fase que deve ocorrer na crosta interna das estrelas de nêutrons, obtida através das equações de transporte, isto é, uma espinodal dinâmica. Em primeiro lugar, fixamos o campo magnético externo em um valor de $4.4 \times 10^{16} G$, e variamos o momento transferido K , aqui em unidades de MeV. Este cálculo é feito somente para efeito de comparação, com o intuito de determinar um valor de K para o qual encontra-se maior instabilidade. A seguir, nas figuras (3) e (4) escolhemos em nosso algoritmo o valor de $K = 100 \text{ MeV}$, para o qual nossos resultados fornecem uma espinodal que, aproximadamente, delimita as demais, e variamos o campo magnético (B em unidades de $4.4 \times 10^{18} G$). Aqui ressaltamos que, apesar dos campos mais intensos observados na superfície de estrelas de nêutrons não serem maiores que $2 \times 10^{15} G$, esperamos que haja campos maiores no seu interior. Particularmente, para o caso de campos toroidais, configurações estáveis foram encontradas nas quais surgem campos maiores que $10^{17} G$ (KIUCHI; YOSHIDA, 2008; FRIEBEN; REZZOLLA, 2012).

Nas figuras (1) e (2) já podemos notar o aparecimento da estrutura de bandas, caracterizada por uma estrutura de bandas que se projeta da área definida pela espinodal. Essas bandas estão associadas com o preenchimento dos níveis de Landau na matéria nuclear e, dados os resultados publicados em (FANG et al., 2016; RABHI; PROVIDÊNCIA; PROVIDÊNCIA, 2009), esperaríamos identificar também, em gráficos mais detalhados, regiões desconectadas que aparecem em densidades mais altas com a abertura de novos níveis de Landau. Quanto às comparações entre as parametrizações NL3 e FSU, observamos nas figuras (3) e (4) que há diferenças pequenas mas notáveis que evidenciam uma certa dependência com o modelo na determinação das densidades. Desta maneira, esperamos que os resultados possam variar um pouco no cálculo de grandezas como o tamanho máximo dos *clusters* de matéria não-homogênea que surgem na nova fase, dependendo da parametrização escolhida. De fato, esperamos que a transição para a matéria não-homogênea seja bastante sensível à dependência na densidade da energia de simetria.

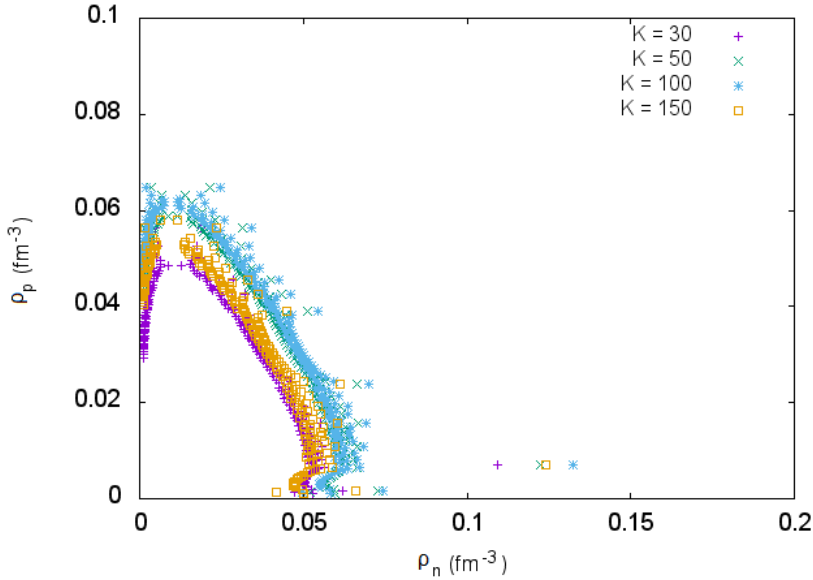


Figura 1 – Comparação de espinodais dinâmicas para a parametrização NL3 com campo magnético externo, modos longitudinais.

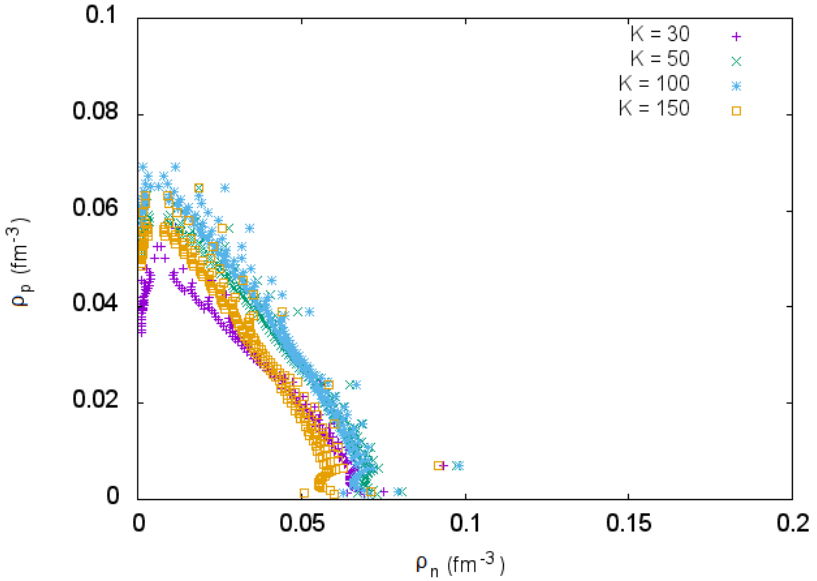


Figura 2 – Comparação de espinodais dinâmicas para a parametrização FSU com campo magnético externo, modos longitudinais.

Finalmente, na figura (5) reproduzimos o gráfico $\rho_n \times \rho_p$ para os modos transversais. Como fica aparente no capítulo 6, ao contrário dos modos longitudinais, onde fatores concorrem para simplificar as expressões que entram na equação matricial, no caso dos modos transversais elas são bastante mais complexas. Por isso, ainda não dispomos de grande quantidade de dados para estes modos, mas esperamos que, com algum refinamento e o uso de processadores mais ágeis, seja possível obtê-los sem maiores complicações. Para este cálculo, utilizamos a parametrização NL3 do modelo de Walecka e um campo magnético de $4.4 \times 10^{16} G$.

Notamos nos gráficos que a estrutura de bandas devida ao preenchimento dos níveis de Landau fica ainda mais evidente nas figuras (3) e (4), mas também aparece nos nossos resultados preliminares para os modos transversais, na figura (5). Apesar de ainda não termos obtido muitas soluções para os modos transversais, já é aparente que a espinodal se comporta de maneira similar àquela calculada a partir dos modos longitudinais, o que nos dá confiança na técnica utilizada.

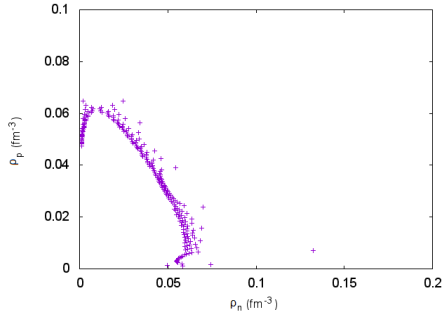
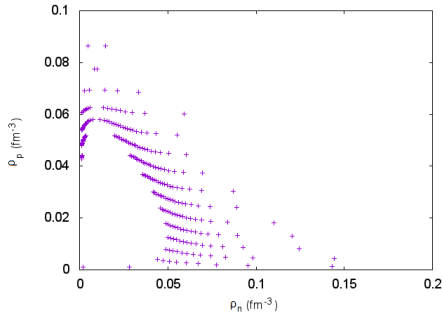
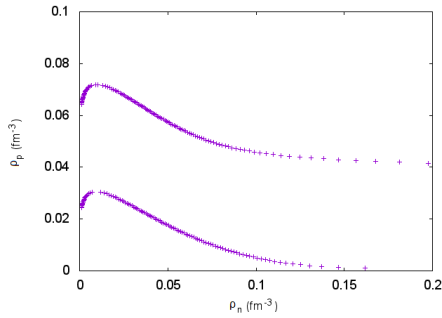
(a) $B = 0.01$ (b) $B = 0.1$ (c) $B = 1$

Figura 3 – Espinodais dinâmicas para a parametrização NL3 com campo magnético externo, modos longitudinais.

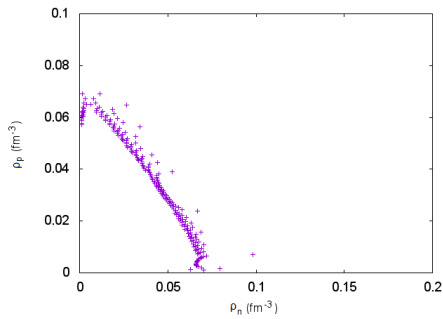
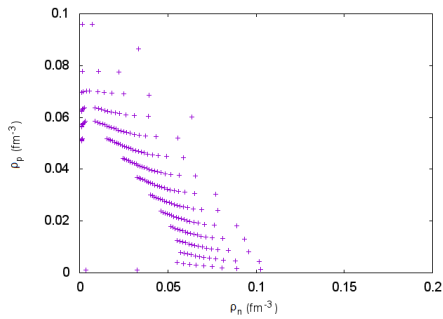
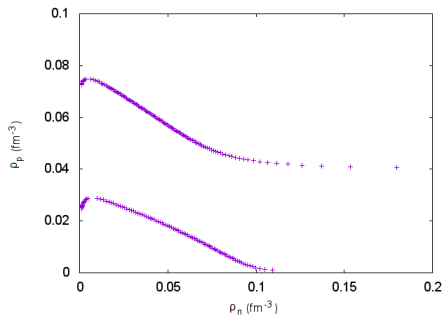
(a) $B = 0.01$ (b) $B = 0.1$ (c) $B = 1$

Figura 4 – Espinodais dinâmicas para a parametrização FSU com campo magnético externo, modos longitudinais.

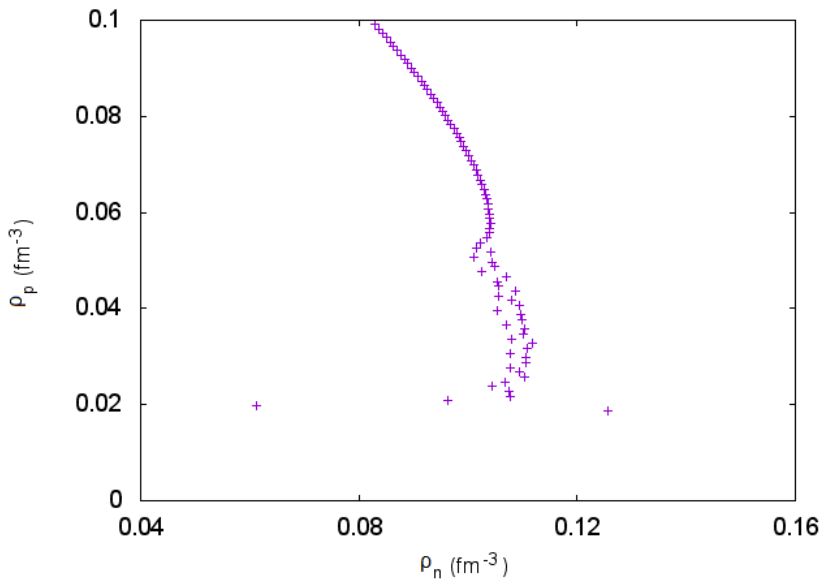


Figura 5 – Espinodal dinâmica para a parametrização NL3 com campo magnético externo, modos transversais.

7 CONCLUSÃO

Com o formalismo descrito e desenvolvido neste texto, esperamos ser capazes de aplicar o método da função de Wigner para o cálculo de propriedades de transporte e limites de instabilidade em matéria nuclear. Os detalhes fornecidos aqui formam a base desta pesquisa, no entanto existem outras vias que também desejamos explorar. Como dito no texto, uma extensão importante da pesquisa é a inclusão de termos de colisão à equação de transporte, que permitirá o cálculo de diversas propriedades que deles advêm. Outras possibilidades incluem a utilização do modelo de Nambu-Jona-Lasinio, além do modelo de Walecka, como modelo das interações nucleares. Apesar de os cálculos necessários não terem sido ainda completos, acreditamos que, devido a certas similaridades entre os modelos, será prático utilizá-lo para este fim. Tais projetos fazem parte também de um esforço de pesquisa mais geral que vem sendo realizado pelo orientador, demais alunos, e o grupo de Física Nuclear da UFSC.

O fato de termos observado em nossos resultados o aparecimento de uma estrutura de bandas essencialmente igual àquela obtida pelo método de funções geratrizes na referência (FANG et al., 2016) nos propicia certo otimismo quanto à adequabilidade do método desenvolvido aos estudos que desejamos empreender no futuro sobre o aparecimento de fases não-homogêneas na crosta interna das estrelas de nêutrons, como a obtenção do tamanho máximo e taxa de crescimento dos *clusters* de matéria não-homogênea. Foi demonstrado em (AVANCINI et al., 2008) que essas propriedades podem ser bem estimadas pelo comprimento de onda relacionado aos modos mais instáveis da matéria, que o nosso método permitirá obter.

É importante ressaltar que nossas equações de dispersão para a matéria sob efeito de um campo magnético externo forte, para os modos longitudinais e transversais, são inéditas. Embora partes do formalismo já estivesse estabelecido, particularmente na física de plasmas, pela primeira vez ele é aplicado consistentemente para a obtenção de equações de dispersão para a matéria nuclear. Somente com o método desenvolvido aqui, já será possível realizar investigações mais profundas sobre a estrutura e evolução das estrelas de nêutrons. A determinação da condutividade elétrica desse tipo de matéria nuclear, por exemplo, é essencial para calcular a possível diminuição no campo magnético proposta por Pons et al. (PONS; VIGANÒ; REA, 2013) que, conforme argumentam os autores, poderia explicar a não observação de pulsares

de raios-X isolados com períodos acima de 12s.

De maneira geral, vemos esta tese como um aspecto de um trabalho mais amplo, principalmente ao levarmos em conta a grande gama de assuntos de interesse na área de matéria nuclear em estrelas de nêutrons, a possibilidade natural de colaboração com pesquisas em astrofísica e a dificuldade de obter boas descrições desses objetos através de teorias mais fundamentais. Nos interessa, no futuro, produzir artigos científicos explorando algumas dessas possibilidades, particularmente no cálculo das condutividades térmica e elétrica da crosta interna das estrelas de nêutrons.

REFERÊNCIAS

- ALAVERDYAN, G.; HARUTYUNIAN, A.; VARUTYUNIAN, Y. Neutron stars with a quark core: I. equations of state. **Astrophysics**, v. 42, p. 1, 2004.
- AVANCINI, S.; BERTOLINO, B. Cold pasta phase in the extended thomas-fermi approximation. **Int. J. Mod. Phys. E**, v. 24, p. 1550078, 2015.
- AVANCINI, S. et al. Nuclear “pasta” phase within density dependent hadronic models. **Phys. Rev. C**, v. 79, p. 035804, 2009.
- AVANCINI, S. et al. Collective modes in relativistic asymmetric nuclear matter. **Phys. Rev. C**, v. 71, p. 044323, 2005.
- AVANCINI, S. et al. Warm “pasta” phase in the thomas-fermi approximation. **Phys. Rev. C**, v. 82, p. 055807, 2010.
- AVANCINI, S. et al. Warm and cold pasta phase in relativistic mean field theory. **Phys. Rev. C**, v. 78, p. 015802, 2008.
- BERTOLINO, B. **Aplicação do modelo de Thomas-Fermi estendido à matéria de prótons, nêutrons e elétrons**. 45 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.
- BOGUTA, J.; BODMER, A. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. **Nucl. Phys.**, A292, p. 413–428, 1977.
- BRACK, M.; BHADURI, R. **Semiclassical Physics**. Boulder: Westview Press, 2003. 462 p.
- BRITO, L. et al. Unstable modes in relativistic neutron-electron-proton (npe) matter at finite temperature. **Phys. Rev C**, v. 74, p. 045802, 2006.
- BUNTA, J.; GIMUCA, Š. Asymmetric nuclear matter in the relativistic mean field approach with vector cross interaction. **Phys. Rev C**, v. 68, p. 054318, 2003.
- CENTELLES, M. **Semiclassical approach to relativistic nuclear mean field theory**. 124 p. Tese (Doutorado) — Universitat de Barcelona, Barcelona, 1992.

DUCOIN, C. et al. Core-crust transition in neutron stars: Predictivity of density developments. **Phys. Rev. C**, v. 83, p. 045810, 2011.

DUNCAN, R.; THOMPSON, C. Formation of very strongly magnetized neutron stars: implication for gamma ray bursts. **ApJ**, v. 392, p. L9–L13, 1992.

ELZE, H.-T.; GYULASSY, M.; VASAK, D. Transport equations for the qcd quark wigner operator. **Nuc. Phys. B**, v. 276, p. 706–728, 1986.

ELZE, H.-T. et al. Quantum transport theory of hadronic matter. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 02, p. 451, 1987.

FANG, J. et al. Larger and more heterogeneous neutron star crusts: A result of strong magnetic fields. **Phys. Rev. C**, v. 94, p. 062801(R), 2016.

FATTOYEV, F. et al. Pure neutron matter constraints and nuclear symmetry energy. **Journ. Phys: Conf. Series**, v. 420, p. 012108, 2013.

FRIEBEN, J.; REZZOLLA, L. Equilibrium models of relativistic stars with a toroidal magnetic field. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 427, p. 3406, 2012.

GLENDENNING, N. **Compact Stars**. New York: Springer-Verlag, 2000. 468 p.

GÖGELEIN, P.; MÜTHER, H. Nuclear matter in the crust of neutron stars. **Phys. Rev. C**, v. 76, p. 024312, 2007.

GREINER, W.; MARUHN, J. **Nuclear models**. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 392 p.

GROOT, S. de; SUTTORP, L. **Foundations of Electrodynamics**. Amsterdam: North-Holland, 2000. 535 p.

HOROWITZ, C.; PÉREZ-GARCIA, M.; PIEKAREWICZ, D. B. J. Dynamical response of the nuclear “pasta” in neutron star crusts. **Phys. Rev. C**, v. 72, p. 035801, 2005.

HOROWITZ, C.; PÉREZ-GARCIA, M.; PIEKAREWICZ, J. Neutrino-“pasta” scattering: The opacity of nonuniform neutron-rich matter. **Phys. Rev. C**, v. 69, p. 045804, 2004.

ITZYKSON, C.; ZUBER, J. **Quantum field theory**. New York: McGraw-Hill, 1980. 752 p.

KAPLAN, D.; NELSON, A. Strange goes on in dense nuclear matter. **Phys. Lett.**, B175, p. 57, 1986.

KELLY, D. Dielectric tensor for a quantum plasma. **Phys. Rev.**, v. 137, p. A641, 1964.

KIUCHI, K.; YOSHIDA, S. Relativistic stars with purely toroidal magnetic fields. **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 044045, 2008.

LANDAU, L. On the vibrations of the electronic plasma. **J. Phys. USSR**, v. 10, p. 25, 1946.

LIFSHITZ, E.; PITAEVSKII, L. **Statistical Physics: Part II**. New York: Elsevier, 1980. 544 p.

LINK, B.; EPSTEIN, R.; LATTIMER, J. Pulsar constraints on neutron star structure and equation of state. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 3362, 1999.

MARCHIOLLI, M. Mecânica quântica no espaço de fase: I. formulação de weyl-wigner. **Rev. Bras. Ensino Fís.**, v. 24, n. 4, p. 421–436, 2002.

MARUYAMA, T. et al. Pasta structures in compact stars. **Recent Developments in Physics**, v. 7, p. 1–57, 2006.

MARUYAMA, T. et al. Nuclear “pasta” structures and the charge screening effect. **Phys. Rev. C**, v. 72, p. 015802, 2005.

NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. **Phys. Rev.**, v. 122, p. 345, 1961.

PAAR, N. et al. Neutron star structure and collective excitations of finite nuclei. **Phys. Rev. C**, v. 90, p. 011304(R), 2014.

PAIS, H. et al. Correlation of the neutron star crust-core properties with the slope of the symmetry energy and the lead skin thickness. **Phys. Rev. C**, v. 93, p. 045802, 2016.

PONS, J.; VIGANÒ, D.; REA, N. A highly resistive layer within the crust of x-ray pulsars limits their spin periods. **Nature Phys.**, v. 9, p. 431, 2013.

RABHI, A.; PROVIDÊNCIA, C.; PROVIDÊNCIA, J. D. Spinodal instabilities and the distillation effect in nuclear matter under strong magnetic fields. **Phys. Rev. C**, v. 79, p. 015804, 2009.

RAVENHALL, D.; PETHICK, C.; WILSON, J. Structure of matter below nuclear saturation density. **Phys. Rev. Lett.**, v. 50, p. 2066, 1983.

RING, P.; SCHUCK, P. **The nuclear many-body problem**. New York: Springer-Verlag, 1980. 716 p.

SAFANELLI, G. **Descrição da matéria nuclear em um campo magnético forte através da função de Wigner**. 83 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

SEROT, B.; WALECKA, J. **Advances in nuclear physics**. New York: Plenum, 1986. 326 p.

SULAKSONO, A.; ALAM, N.; AGRAWAL, B. Core-crust transition properties of neutron star within systematically varied extended relativistic mean-field model. **Int. J. Mod. Phys. E**, v. 23, p. 1450072, 2014.

TENREIRO, R.; HAKIM, R. Transport properties of the relativistic degenerate electron gas in a strong magnetic field: Covariant relaxation-time model. **Phys. Rev. D**, v. 15, p. 1435, 1977.

TODD-RUTEL, B.; PIEKAREWICZ, J. Neutron-rich nuclei and neutron stars: a new accurately calibrated interaction for the study of neutron-rich matter. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 122501, 2005.

VASAK, D. et al. Quantum transport theory for abelian plasmas. **Ann.Phys.**, v. 173, p. 462–492, 1987.

VLASOV, A. On the kinetic theory of an assembly of particles with collective interaction. **J. Phys. USSR**, v. 9, p. 25, 1945.

WEBER, F. et al. Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics. **Prog. Part. Nucl. Phys.**, v. 59, p. 94, 2007.

WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. **Phys. Rev.**, v. 40, p. 749–759, 1932.

WITTEN, E. Cosmic separation of phases. **Phys. Rev. D**, v. 30, p. 272, 1984.

YAKOVLEV, D.; PETHICK, C. Neutron star cooling. **Ann. Rev. Astron. Astrophys.**, v. 42, p. 1, 2004.

ZHUANG, P.; HEINZ, U. Relativistic quantum transport theory for electrodynamics. **Ann. Phys.**, v. 249, p. 311, 1996.